

## 6. Podsumowanie i wnioski

W niniejszej pracy **przedstawiono metodę oceny wiarygodności symulacji numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych**. Metodę tę oparto na analizie wrażliwości rozwiązań numerycznych na parametry wejściowe. Zaproponowana metoda pozwala wyłonić istotne parametry dla badanej konfiguracji, to znaczy takie, których zmiany wpływają w sposób najbardziej istotny na rezultat symulacji numerycznych. Zastosowanie niniejszej metody pozwala nie tylko na określenie istotnych parametrów fizycznych, ale również na określenie dokładności z jaką należy przeprowadzić pomiary eksperymentalne, aby móc dokonać bezpośredniego porównania pomiędzy wynikami symulacji numerycznej a pomiarami eksperymentalnymi, a w konsekwencji dokonać walidacji obliczeń numerycznej.

Zaproponowana metoda badania wrażliwości na parametry wejściowe została wpisana pomiędzy dwa procesy weryfikacji i walidacji, związane z uwiarygodnianiem symulacji numerycznych, które są obecnie nieformalnymi standardami w numerycznej mechanice płynów. Takie umiejscowienie metody umożliwi wybranie optymalnej konfiguracji eksperymentalnej do przeprowadzenia walidacji symulacji numerycznej, a dzięki temu usprawnienie tego czasochłonnego etapu. Ponadto metoda ta określa dokładność z jaką należy przeprowadzić pomiary, co jest cenną wskazówką dla osób odpowiedzialnych za zaprojektowanie eksperymentu koniecznego dla procesu walidacji. W przypadku, gdy badania eksperymentalne nie są przeprowadzane, można na podstawie tej metody wnioskować na temat wiarygodności przeprowadzonych obliczeń w funkcji parametrów uznanych za istotne. Jeśli symulacja numeryczna wykazuje niewielką wrażliwość na zmiany fizycznych parametrów wejściowych, można wysnuć wniosek, iż jest ona bardziej wiarygodna od innych konfiguracji, które wykazują wrażliwość na większą ilość parametrów lub dla których obliczona miara wrażliwości jest ilościowo większa.

W pracy ograniczono się do rozważania tylko jednej klasy przepływów, a mianowicie przepływów lepkich i termicznych. Zrobiono to celowo, gdyż etap walidacji jest ściśle związany z określoną dziedziną i stworzenie ogólnej metody wydaje się być mało prawdopodobne. Roache stwierdza w swojej książce [23], że ze względu na specyfikę badań eksperymentalnych można przedstawić jedynie ogólne obserwacje na temat metodologii walidacji. Toteż jest mało prawdopodobne aby powstał w przyszłości ogólny standard procedur walidacyjnych. W porównaniu z dotychczas publikowanymi opracowaniami na temat uwiarygodniania symulacji numerycznych w mechanice płynów [21-25,28,30], autor rozprawy starał się poświęcić tyle samo miejsca zagadnieniom weryfikacji co walidacji. Do tej pory widoczny jest nadmiar publikacji na temat weryfikacji, dla przykładu tematowi weryfikacji w książce Roache [23] poświęcone jest trzy razy więcej miejsca niż walidacji. Podobnie jest w innych publikacjach [21-25,28].

W celu szczegółowego przedstawienia zaproponowanej metody **opisano pełny proces weryfikacji i walidacji**. Proces ten potraktowano całościowo, opisując szczegółowo programy stworzone na potrzeby analizy przedmiotowej klasy przepływów, proces ich weryfikacji przy pomocy wzorców numerycznych, następnie przeprowadzono analizę wrażliwości dla wybranej konfiguracji eksperymentalnej ze względu na parametry wejściowe. Na zakończenie przeprowadzono pełną walidację z wykorzystaniem danych eksperymentalnych. (rozdział 4 i 5).

Wcześniej w rozdziale drugim przedstawiono matematyczne sformułowanie modelu wykorzystanego do analizowania przepływów lepkich i termicznych. Model ten stanowi układ równań różniczkowych cząstkowych wraz z warunkami brzegowymi i początkowymi opisującymi nieściśliwe przepływy termiczne cieczy newtonowskich. Przedstawiono dwie metody numeryczne służące do rozwiązywania tego typu równań. Pierwsza z nich oparta jest na metodzie różnic skończonych, natomiast druga na metodzie bezsiatkowej. **Stworzono dwa autorskie programy SOLVSTR i SOLVMEF**, w których zaimplementowano wyżej wymienione metody. **Programy zostały zweryfikowane przy pomocy wzorców numerycznych**, obejmujących przepływ

wymuszony w zamkniętym kanale z ruchomą ścianką górną (ang. moving lid driven cavity, Ghia [39]), konwekcję naturalną płynu newtonowskiego w różnicowo grzonym kanale dla umiarkowanych liczb Rayleigha (ang. cavity heated from the side, de Vahl Davis [15]) oraz konwekcję naturalną płynu newtonowskiego w różnicowo grzonym naczyniu dla wysokich liczb Rayleigha (Le Quere [16]). Porównano dokładność oraz szybkość wykonania stworzonych programów z programami komercyjnymi takimi jak Fluent [101] i Fidap [102] oraz z uniwersyteckim programem FRECON3V [103], rozważając przepływ wody w różnicowo grzonym sześciennym dla temperatur bliskich temperaturze krzepnięcia. Na podstawie tych badań **wyłoniono numeryczne rozwiązanie wzorcowe dla przepływów konwekcyjnych**, które zostało opublikowane w pracy Michałek T., Kowalewski T.A., Sarler B. [105]. Do przeprowadzenia weryfikacji zaproponowano nową metodę oceny błędów opartą na ilościowym porównywaniu struktur przepływu.

W wyniku przeprowadzonych testów z wykorzystaniem wzorców numerycznych dla obu programów można stwierdzić, iż metody wykorzystane w autorskich programach SOLVSTR i SOLVMEF są zbieżne. Program SOLVSTR poprawnie odtworzył strukturę przepływu dla zagadnienia przepływu w kanale z ruchomą ścianką górną dla liczb Reynoldsa  $Re = 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500, 10000$ . Rozwiązania te są obciążone błędem zbieżności, oszacowanym na podstawie ekstrapolacji Richardsona, równym 0.1%, 0.2%, 0.5 %, 3 %, 17 %, 20 %, 21 % odpowiednio dla kolejnych liczb Reynoldsa. Zagadnienie przepływu konwekcyjnego w różnicowo grzonym kanale rozwiązane zostało dla liczb Rayleigha  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$ . Otrzymane rozwiązania numeryczne obciążone są błędem zbieżności numerycznej, oszacowanym na podstawie ekstrapolacji Richardsona, równym 0.1 %, 0.2 %, 0.3 %, 1 %, 2 %, 7 %. Teoretyczny i rzeczywisty rząd zbieżności rozwiązań wyniósł dwa dla większości rozważanych przypadków. Otrzymane wyniki są porównywalne z wynikami wzorców numerycznych opublikowanymi w literaturze [15,16,60-65,94].

Metoda bezsiatkowa oparta na aproksymacji DAM [99,100], która została wykorzystana w programie SOLVMEF, okazała się być mniej dokładna i wolniej zbieżna dla przepływów, w których dominują człony nieliniowe. Fakt ten został zidentyfikowany przy pomocy wzorca numerycznego zdefiniowanego przez Ghia [39]. Nie udało się uzyskać poprawnych wyników (tzn. z błędem zbieżności poniżej 3 %) dla liczb Reynoldsa wyższych niż 1000. Również nie udało się uzyskać wyników o zadawalającym stopniu zbieżności dla wzorca numerycznego obejmującego przepływy konwekcyjne w różnicowo grzonym kanale dla liczb Rayleigha wyższych od  $10^5$ . Jednakże na podstawie otrzymanych rezultatów dla tego wzorca można stwierdzić, iż metoda jest odpowiednia do symulacji zjawisk, w których dominują efekty dyfuzyjne. Dla przykładu problem przepływu konwekcyjnego dla niskich liczb Reynoldsa ( $Ra = 10^3, 10^4$ ) został rozwiązany kilkakrotnie szybciej przez program SOLVMEF w porównaniu z programem SOLVSTR, przy tej samej ilości węzłów obliczeniowych (100x100 węzłów).

**Porównanie efektywności stworzonych programów** z programami komercyjnymi Fluent [101] i Fidap [102] oraz uniwersyteckim programem FRECON3V [103,104] zostało wykonane **na podstawie zdefiniowanego wzorca numerycznego** obejmującego przepływ wody w różnicowo grzonym kanale dla temperatur  $\Delta T = 10$  °C. Stosując zaproponowaną metodę oceny błędów wybrano rozwiązanie otrzymane programem FRECON jako wzorzec numeryczny. Szybkość rozwiązywania zdefiniowanego wzorca z wykorzystaniem programu SOLVSTR była podobna do szybkości z jaką rozwiązywano problem na siatce o tych samych rozmiarach przez program FRECON3V. Natomiast program SOLVMEF okazał się być wolno zbieżny, co potwierdza tezę, iż nie jest to program adekwatny do analizowania przepływów charakteryzujących się wysokimi liczbami Rayleigha ( $Ra = 1.5 \cdot 10^6$ ). Czas obliczeń programem SOLVMEF był około pięćdziesiąt razy dłuższy w porównaniu z czasami obliczeń z wykorzystaniem programu FRECON3V czy SOLVSTR. Programy komercyjne wykorzystane do rozwiązania niniejszego wzorca poprawnie odtworzyły strukturę przepływu. Fidap charakteryzował się dużą szybkością osiągnięcia zbieżnego

rozwiązania w porównaniu z innymi programami, natomiast przy pomocy programu Fluent udało się uzyskać rezultaty zbliżone z rozwiązaniem wzorcowym, jednakże program ten potrzebował w tym celu dwa razy gęstszej siatki.

W rozdziale trzecim **przedstawiono szczegółowy sposób postępowania przy przeprowadzaniu analizy wrażliwości** ze względu na parametry fizyczne. Określono w jaki sposób wylaniać istotne parametry dla konfiguracji eksperymentalnej oraz w jaki sposób oszacować dokładność pomiarów eksperymentalnych. W tym celu zdefiniowano bezwzględną miarę wrażliwości (3.5), którą wylicza się na podstawie niezależnych symulacji numerycznych z różnymi parametrami wejściowymi. Zaprezentowano przykładową analizę wrażliwości ze względu na termiczne warunki brzegowe, warunki początkowe i wartości termo-fizyczne cieczy modelowej dla wybranej konfiguracji eksperymentalnej. W wyniku tej analizy zidentyfikowano kluczowe parametry dla tej konfiguracji, oszacowano konieczną dokładność pomiarów eksperymentalnych oraz przedstawiono szereg wniosków dotyczących przeprowadzenia eksperymentalnej walidacji. Najistotniejszymi parametrami okazały się temperatura zimnej ścianki  $T_c$  oraz temperatura ciepłej ścianki  $T_h$  oraz wartość współczynnika przejmowania ciepła  $\alpha_1$  służącego do określenia strumienia  $Q_1$ . Oceniając konieczną dokładność pomiarów stwierdzono, że wpływ błędnie przyjętych wartości współczynników termo-fizycznych wody można zidentyfikować jedynie na podstawie pomiarów pól prędkości i temperatury, a nie jest to możliwe na podstawie jedynie pomiarów punktowych temperatury. Dokładność pomiaru temperatury  $T_h$  i  $T_c$  w ściankach aluminiowych z jaką należy wykonać eksperyment musi być lepsza niż  $1\text{ }^\circ\text{C}$ , temperatury zewnętrznej  $T_{\text{ext}}\ 2\text{ }^\circ\text{C}$ . Natomiast pomiar punktowy temperatury w ściankach pleksiglasowych wymaga dokładności  $0.5\text{ }^\circ\text{C}$ . Okazało się, że konfiguracja jest bardzo wrażliwa na współczynniki przejmowania ciepła dla ścianek izotermicznych i wykazuje dla monitorowanych funkcjonalów rozbieżności rzędu 3-4 % przy zmianach współczynników o 5%. Są to zmiany istotne, gdyż powodują zmianę struktury przepływu, którą można zidentyfikować jedynie przy pomocy pomiarów pól prędkości.

W rozdziale czwartym **przedstawiono rezultaty badań eksperymentalnych** wykonanych w ramach niniejszej pracy i dotyczących przepływu wody w różnicowo grzanej sześciennie, a w szczególności stanów stacjonarnych dla liczb Rayleigha w zakresie od  $10^6$  do  $10^9$ . Przedstawiono pola prędkości i temperatury dla centralnego pionowego przekroju przez sześciennik, uzyskane przy pomocy optycznych technik pomiarowych: cyfrowej anemometrii obrazowej (PIV) i cyfrowej termometrii obrazowej (PIT). Dodatkowo zestawiono te dane z punktowymi pomiarami temperatury wykonywanymi w ściankach naczynia pomiarowego oraz w pomieszczeniu gdzie wykonywano pomiary. Cyfrowa analiza obrazów umożliwiła również wizualizację torów cząstek, dzięki którym można jakościowo określać zgodność wyników eksperymentalnych z wynikami symulacji numerycznych. W wyniku tych badań **zdefiniowano wzorzec eksperymentalny** dla  $Ra = 1.5 \cdot 10^6$  i  $Pr = 11.78$  i temperatur w zakresie  $0 - 10\text{ }^\circ\text{C}$ . Przepływ charakteryzuje się specyficzną strukturą, spowodowaną anomalną zależnością gęstości wody w funkcji temperatury. Określono błąd pomiaru dla uzyskanych pól prędkości rzędu 8 % (0.07 mm/s), oraz pól temperatury rzędu 10 % ( $1\text{ }^\circ\text{C}$ ). Dla punktowych pomiarów temperatury błąd ten wynosił około  $0.3\text{ }^\circ\text{C}$ . Określono termiczne warunki brzegowe dla tej konfiguracji, w tym określono wartości współczynników przejmowania ciepła przy pomocy dodatkowych pomiarów eksperymentalnych.

Dodatkowo przedstawiono wyniki badań dla wyższych liczb Rayleigh ( $Ra > 10^7$ ), które nie zawierały struktury przepływu składającej się z dwóch wirów wywołanej anomalną zależnością gęstości wody od temperatury. Dokładność otrzymanych pól prędkości wynosiła około 8% dla umiarkowanych liczb Rayleigh ( $Ra = 3 \cdot 10^7$ ) oraz 14 % dla wysokich liczb Rayleigh ( $Ra \sim 10^8$ ). Dla każdego z wykonanych eksperymentów określono oddzielnie dokładność pomiaru pola prędkości (por. tabele opisujące eksperymenty w Dodatku) na podstawie serii pól prędkości otrzymanych dla tej samej konfiguracji. Dokładność pomiaru pól temperatury została oszacowana na podstawie zakresu wrażliwości zawieszin ciekło krystalicznych i wynosiła od 10 % do 30 %.

Dokładność pomiarów punktowych temperatury, podobnie jak w poprzedniej konfiguracji wynosiła 0.3 °C.

Ostatnim etapem badań eksperymentalnych było **przeprowadzenie analizy zerwania laminarności przepływu** wraz z zwiększaniem się liczby Rayleigha. W tym celu przeprowadzono pomiary eksperymentalne rejestrując obrazy jedynie dla fragmentu badanego wcześniej przekroju, dzięki czemu udało się zwiększyć dokładność pomiaru pól prędkości (0.35 mm/s dla wyższych liczb Rayleigh, czyli ok. 5%). Na podstawie przeprowadzonej analizy zaobserwowano dla przepływów o liczbie Rayleigha  $Ra > 10^7$  falowy charakter ruchu w warstwach przyściennych, który dla przepływów o liczbie  $Ra = 4 \cdot 10^8$  zmienia się w ruch o dużej intensywności turbulencji obserwowany w obszarach, w których występują duże wartości prędkości. Wysunięto wniosek, że lokalne zerwanie stacjonarności przepływu ma miejsce poniżej literaturowej krytycznej liczby Rayleigha (Quere [17], Chenoweth [64]). Przeprowadzone przez autora wstępne symulacje metodą DNS zdają się wskazywać, że wprowadzenie niejednorodnych termicznych warunków brzegowych może być źródłem periodycznych perturbacji pola przepływu, zaobserwowanych w eksperymencie. Tłumaczyłoby to pojawienie się w polu prędkości impulsowych zmian (ang. spikes). Tym bardziej wskazuje to na konieczność walidacji kodów numerycznych przy modelowaniu przepływów charakterystycznych dla wysokich liczb Rayleigha, gdzie niewielkie zaburzenia termicznych warunków brzegowych powodują jakościowe zmiany pola i z pewnością zmieniają krytyczną liczbę  $Ra$  reżimu przejściowego.

W rozdziale piątym **przeprowadzono walidację obliczeń numerycznych** wykonanych przy pomocy programów SOLVSTR i Fluent **wykorzystując zdefiniowany przez autora wzorzec eksperymentalny**. W walidacji tej uwzględniono niepewność pomiarów eksperymentalnych oraz niepewność rozwiązania numerycznego. Niepewność pomiarów eksperymentalnych oszacowano na podstawie dokładności pomiarów, natomiast niepewność symulacji numerycznej przy pomocy ekstrapolacji Richardsona. Symulacja nie uwzględniająca transportu ciepła w ściankach aluminiowych i pleksiglasowych została oceniona negatywnie już na podstawie samych punktowych pomiarów temperatury. Porównano dwie symulacje numeryczne uwzględniające transport ciepła w ściankach aluminiowych z wynikami eksperymentalnymi. Pierwsza z symulacji zakładała kawałkami liniowe zależności własności materiałowych od temperatury, natomiast druga zakładała stałe wartości materiałowe. Dla obu symulacji określono błąd porównania pomiędzy wynikiem symulacji numerycznej a pomiarami eksperymentalnymi. Błąd wyliczony na podstawie profili prędkości wzdłuż wybranych przekrojów był znacząco większy dla drugiej symulacji w porównaniu z pierwszą. Zidentyfikowane rozbieżności pomiędzy symulacjami numerycznymi a eksperymentem mogą być spowodowane tym, iż dokładność pomiarów eksperymentalnych nie była wystarczająca. Nie udało się otrzymać pól prędkości z dokładnością lepszą niż 6 %, co było warunkiem otrzymania zadawalającej zgodności dla tej konfiguracji.

Dodatkowo **przedstawiono walidację obliczeń** odpowiadające tej samej konfiguracji eksperymentalnej **dla wyższych liczb Rayleigha ( $Ra = 3 \cdot 10^7$ ,  $Ra = 1.3 \cdot 10^8$ )**. Na podstawie przeprowadzonej analizy wrażliwości okazało się, iż konfiguracje te są mniej wrażliwe na parametry określające termiczne warunki brzegowe, w tym temperaturę zewnętrzną oraz współczynniki przejmowania ciepła określające strumienie ciepła między ściankami naczynia a otoczeniem. Fakt ten umożliwił wykonanie walidacji rezultatów symulacji numerycznych otrzymanych również przy pomocy prostego i szybkiego programu SOLVSTR, które nie uwzględnia przepływu ciepła w ściankach naczynia pomiarowego. W rezultacie pozytywnie oceniono obliczenia wykonane z wykorzystaniem programu SOLVSTR i Fluent. Fakt ten potwierdza zasadność przeprowadzania analizy wrażliwości, która dla tej konfiguracji wykazała wrażliwość na mniejszą ilość parametrów.

**Przeprowadzono analizę wrażliwości dla konfiguracji eksperymentalnej obejmującej przepływ glikolu polietylenowego wywołany pionowym gradientem temperatury**. W sposób jednoznaczny dla tej konfiguracji został zidentyfikowany istotny parametr wejściowy, którym

okazał się współczynnik lepkości przyjęty w symulacji numerycznej. W oparciu o przeprowadzoną analizę porównawczą symulacji, która uwzględnia zmienny i stały współczynnik lepkości **zasugerowano, iż analiza wrażliwości pozwala określić niepewność danych materiałowych  $U_{SPD}$** , niezbędną w procedurze walidacji, gdy modelowane są przepływy cieczy o nieznanymi dokładnie własnościach materiałowych.

Podsumowując można stwierdzić, że **zaproponowana metoda oceny wiarygodności symulacji numerycznych usprawnia proces walidacji poprzez określenie istotnych parametrów** dla badanej konfiguracji. Na podstawie przytoczonych przykładów można stwierdzić, że metoda oparta jedynie na przeprowadzaniu niezależnych symulacji numerycznych pozwala poprawnie określić istotne parametry dla badanej konfiguracji oraz oszacować niezbędną dokładność pomiarów do przeprowadzenia walidacji eksperymentalnej (cyt. „... beneficial synergism arises when experiments are designed specifically for CFD Validation” Aeschliman and Oberkamp [51]). Uzyskanie pozytywnej oceny procedury walidacyjnej, poprzez porównanie z pomiarami eksperymentalnymi pozwoliło stwierdzić, które z przeprowadzonych symulacji wystarczająco poprawnie opisują badane zjawisko fizyczne.

## 7. Bibliografia

- [1] Boehm B.W., „Software Engineering Economics”, *Prentice-Hall*, New York, 1981.
- [2] Blottner F. G., „Accurate Navier-Stokes results for the hypersonic flow over a spherical nosetip”, *AIAA J. Spacecraft Rockets*, **27 (2)**, pp.113-122, 1990.
- [3] Roache P.J., „Quantification of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **29**, pp. 123-160, 1997.
- [4] Marini M., Desideri J.-A., Grasso F., Periaux J., “The FLOWNET Database Project” *ERCOFTAC Bulletin No. 52*, 2002.
- [5] AGARD, “Validation of Computational Fluid Dynamics”, *NATO Advisory Group for Aeronautical Research and Development*, Lisbon, Portugal, 1998.
- [6] Freitas C. J., Ed., „The CFD Triathlon: Three Laminar Flow Simulations by Commercial CFD Codes”, *ASME Fluids Engineering Conference*, **160**, Washington, DC, 1993.
- [7] *Proc. of 7th ERCOFTAC/IAHR Workshop on Refined Turbulence Modeling*, UMIST, Manchester, UK, 1998.
- [8] *Proc. of the Seminar EURO THERM 69 Heat and Mass Transfer In Solid-Liquid Phase Change Processes*, Bistra Castel, Ljubljana, Slovenia, 2003.
- [9] NPARC Alliance CFD Code Validation Web Site, <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/>
- [10] Coleman H. W., Steele W. G., “Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers, 2<sup>nd</sup> Edition, *Willey*, New York, 1999.
- [11] Freitas C. J., „Editorial Policy Statement on the Control of Numerical Accuracy”, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **115 (3)**, pp. 339-340, 1993.
- [12] Gresho P. M., Taylor C., “Editorial”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **19**, p. iii, 1994.
- [13] AIAA, ”Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy and Experimental Uncertainty”, *AIAA Journal*, **32 (1)**, p.3 , 1994.
- [14] ASME Editorial Board, “Journal of Heat Transfer Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy”, *ASME Journal of Heat Transfer*, **116**, pp. 797-798, 1994.
- [15] de Vahl Davis G., “Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **3 (3)**, pp. 249-264, 1983.
- [16] Le Quere P., „Accurate Solutions to the Square Thermally Driven Cavity at High Rayleigh Number”, *Computers and Fluids*, **20 (1)**, pp.29-41, 1991

- [17] Le Quere P., Behnia M., „From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity“, *Journal of Fluid Mechanics*, **358**, pp. 81-107,1998.
- [18] IEEE, “IEEE Standard dictionary of electrical and electronics terms”, *ANSI/IEEE Std 100-1984*, 1984.
- [19] IEEE, “IEEE standard glossary of software engineering terminology”, *IEEE Std 610.12-1990*, New York, 1991.
- [20] ISO, “ISO 9000-3: Quality management and quality assurance standards – Part 3: guidelines for the application of ISO 9001 to the development, supply and maintenance of software”, *International Standards Organization*, Geneva, Switzerland, 1991.
- [21] AIAA, “Guide for the verification and validation of computational fluid dynamics simulations”, *AIAA-G-077-1998*, *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Reston, VA, 1998.
- [22] Roache P.J., “Verification of codes and calculations”, *AIAA Journal*, **36** (5),pp. 696-702,1998.
- [23] Roache P.J., “Verification and validation in Computational Science and Engineering”, *Hermosa Publishers*, Albuquerque, NM, 1998.
- [24] Oberkampf W.L., Blottner F.G., Aeschliman D.P., “Methodology for Computational Fluid Dynamics Code Verification/Validation”, *AIAA Paper 95-2226*, *26<sup>th</sup> AIAA Fluid Dynamics Conference*, San Diego, California,1995.
- [25] Stern F., Wilson R.V., Coleman H.W., Paterson E.G., “Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD Simulations – Part1: Methodology and Procedures”, *Journal of Fluids Engineering*, **123**, pp.793-802, 2001.
- [26] Roache P.J., “Conservatism of the grid convergence index in finite volume computations on steady-state fluid flow and heat transfer”, *Journal of Fluids Engineering*, **125** (4), pp.731-732, 2003.
- [27] Roache P.J., “Criticism of the >> correction factor<< verification method “, *Journal of Fluids Engineering*, **125** (4), pp732-733,2003
- [28] Oberkampf W.L., Trucano T.G., “Verification and validation in computational fluid dynamics”, *Progress in Aerospace Science*, **38**, pp.209-272,2002.
- [29] Coleman H.W., “Some observation on Uncertainties and the Verification and Validation of a Simulation”, *Journal of Fluids Engineering*, **125** (4), pp.733-735, 2003.
- [30] Oberkampf W.L., Trucano T.G., “Validation methodology in computational fluid dynamics”, *AIAA Journal*, 2000-2549,2000.
- [31] Richtmeyer R.D., Morton K.W., “Difference methods for initial-value problems”, *Interscience*, New York,1967.

- [32] Johnson C., Rannacher R., Boman M., “Numerics and Hydrodynamics Stability: Toward Error Control in Computational Fluid Dynamics”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **32**, pp.1058-1079, 1995
- [33] Ciarlet G., “The Finite Element Method for Elliptic Problems”, *NorthHolland Publishing Co.*, 1978.
- [34] Roache P.J., “Code verification by the method of manufactured solutions”, *Journal of Fluids Engineering*, **124** (1), 2002.
- [35] Salari K., Roache P.J., “The Influence of Sweep on Dynamic Stall Produced by a Rapidly Pitching Wing”, *AIAA Paper 90-9581*, 1990.
- [36] Huang H., Li M., „Finite-Difference Approximation for the Velocity-Vorticity Formulation on Staggered and Non-Staggered Grids”, *Computers and Fluids*, **26** (1), pp.59-82, 1995.
- [37] Wang C.Y., “Exact Solutions of the Steady-State Navier-Stokes Equations”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **23**, pp.159-177,1991.
- [38] Kovacevic I., Poredos A., Sarler B., “Solving the Stefan problem with the radial basis function collocation method”, *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, **44** (6), pp.575-599, 2003.
- [39] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T., “High-Re Solutions for Incompressible Flows Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, *Journal of Computational Physics*, **48**, pp.387-411, 1982.
- [40] Hortman M., Peric M., Scheuerer G., „Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **11**, pp. 189-207, 1990.
- [41] Richardson L.F., “The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with Application to the Stress in a Masonry Dam”, *Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **210**, pp. 307-357, 1908.
- [42] Ferziger J.H., “Estimation and Reduction of Numerical Error”, Proc. of Fluids Engineering Conference, *FED - Vol.158*, Washington, 1993.
- [43] Khosla P.K., Rubin S.G., “A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme”, *Computers and Fluids*, **2**, pp.207-209, 1974.
- [44] Babuska I., Strouboulis T., Updhayay C.S., “A Model Study of the Quality of A Posteriori Error Estimators for Linear Elliptic Problems. Error Estimation in the Interior of Patchwise Uniform Grid of Triangles”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **114**, pp.307-378, 1994.
- [45] Babuska I., Strouboulis T., Gangaraj S.K., Updhayay C.S., “Pollution Error in the h-Version of the Finite Element Method and the Local Quality of the Recovered Derivatives”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **140**, pp.1-37, 1997.



- [46] Chang S., Haworth D.C., “Adaptive Grid Refinement Using Cell-Level and Global Imbalances”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, pp. 375-392, 1997.
- [47] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., “A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, pp. 337-357, 1987.
- [48] Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C., “Superconvergence Recovery Technique and A Posteriori Error Estimates”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, pp.1321-1339, 1990.
- [49] Pelletier D., Ignat L., ”On the Accuracy of the Grid Convergence Index and the Zhu-Zienkiewicz Error Estimator”, *Joint JSME-ASME Fluid Mechanics Meeting, Quantification of Uncertainty in Computational Fluids Dynamics*, ASME FED Vol. **213**, pp. 31-36, 1995.
- [50] Pelletier D., Ignat L., Ilinca F., “An Adaptive Finite Element Method for Conjugate Heat Transfer”, *AIAA Paper 95-0637, AIAA 33<sup>rd</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, 1997
- [51] Aeschliman D.P., Oberkampf W.L., „Experimental Methodology for Computational Fluid Dynamics Code Validation”, *SAND95-1189*, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [52] Marvin J.G., “Perspective on Computational Fluid Dynamics Validation”, *AIAA Journal*, **33** (10), pp.1778-1787, 1995.
- [53] Moffat R.J., “Contribution to the Theory of Uncertainty Analysis for Single-Sample Experiments”, *The 1980-81 AFOSR/HTTM-Stanford Conference on Complex Turbulent Flows*, **1**, ThermoSciences Division, Mechanical Engineering Department, Stanford University, 1981.
- [54] ERCOFTAC Fluid Dynamics Databases <http://ercoftac.mech.surrey.ac.uk>
- [55] NAS Data Set Archive <http://www.nas.nasa.gov>
- [56] QNET-CFD <http://www.qnet-cfd.net>
- [57] ASME Journal of Fluids Engineering <http://www.asme.org>
- [58] Muller A., Ed. Proc. of the Basel World CFD User Days 1994, *Second World Conference in Applied Computational Fluid Dynamics*, Basel, Switzerland, 1994.
- [59] MullerA., Loffler B. Eds. Proc. of the Basel World CFD User Days 1996, *Third World Conference in Applied Computational Fluid Dynamics*, Basel, Switzerland, 1996.
- [60] Upson C.D., Gresho P.M., Lee R.L., “Finite-element simulation of thermally induced convection in an enclosed cavity” , *Report UCID-18602*, Lawrence Livermore Lab., Livermore, California, 1980.
- [61] Quon C. “Effects of grid distribution on the computation of high Rayleigh convection in a differentially heated cavity”, *Proc. of Natn. Symp. On Numerical Methods in Heat Transfers*, Univ. of Maryland, Baltimore, 1981.

- [62] Winters K., "Prediction of laminar natural convection in heated cavities", *Numerical Methods in Heat Transfer*, **2**, pp.179-204, Wiley, New York, 1983.
- [63] Lauriat G., Altimir I., "A new formulation of the SADI method for the prediction of natural convection flows in cavities", *Computers and Fluids*, **13**, 1983.
- [64] Chenoweth D.R., Paolucci S., "Natural Convection in an enclosed vertical layer with large horizontal temperature differences", *Journal of Fluid Mechanics*, **169**, 1986.
- [65] Haldenwang P., Labrosse G., "2-D and 3-D spectral Chebyshev solutions for free convection at high Rayleigh number", *Proc. of 6<sup>th</sup> Finite Element Methods in Flow Problems*, pp. 261-266, 1986.
- [66] Banaszek J., Jaluria Y., Kowalewski T.A., Rebow M., „Semi-Implicit FEM Analysis of Natural Convection in Freezing Water”, *Numerical Heat Transfer, Part A*, **36**, pp.449-472, 1999.
- [67] Kowalewski T.A., Cybulski A., „Experimental and numerical investigation of natural convection in freezing water”, *Proc. of Conf. On Heat Transfer with Change of Phase*, Kielce, 61 (2), pp. 7-16, 1996.
- [68] Kowalewski T.A., Rebow M., „Freezing of Water in a Differentially Heated Cubic Cavity”, *International Journal on Computational Fluid Dynamics*, **11**, pp.193-210, 1999.
- [69] Hiller W.J., Koch St., Kowalewski T.A., Stella F., "Onset of natural convection in a cube", *International Journal Heat and Mass Transfer*, **36**, pp. 3251-3263, 1993.
- [70] Giangi M., Kowalewski T.A., Stella F., Leonardi E., "Natural Convection during ice formation: numerical simulation vs. experimental results", *Comp. Assisted Mech. And Eng. Scs.*, **7**, pp. 321-342, 2000.
- [71] Giangi M., Stella F., Kowalewski T.A., "Phase-change problems with free convection: fixed grid simulation", *Comp. & Vis. Scs.*, **2**, pp.123-130, 1999.
- [72] Zubkov P.T., Kalabin E.V., "Numerical Investigation of the Natural Convection of Water in the Neighborhood of the Density Inversion Point for Grashof Number up to  $10^6$ ", *Fluid Dynamics*, **36** (6), pp. 944-951, 2001.
- [73] Gebhart B., Mollendorf J., "A new density relation for pure and saline water", *Deep Sea Res.*, **24**, 831, 1977.
- [74] Le Quere P., "Transition to unsteady natural convection in a tall water-filled cavity", *Phys. Fluids A*, **2** (4), 1990.
- [75] Paterson J., Imberg J. "Unsteady natural convection in a rectangular cavity", *J. Fluid Mechanics*, **100**, pp. 65-86, 1980.
- [76] Bejan A. "Convection Heat Transfer", *John Wiley & Sons*, 2<sup>nd</sup> Edition, New York, 1995.
- [77] Schladow S.G., Paterson J.C., Street R.L., "Transient flow in a side-heated cavity at high Rayleigh number: a numerical study", *J. Fluid Mech.*, **200**, pp. 121-148, 1989.

- [78] Patterson J.C., Armifield S.W., “Transient features of natural convection in a cavity”, *J. Fluid Mech.*, **219**, pp.469-497, 1990.
- [79] Armfield S.W., Patterson J.C., ”Wave properties of natural-convection boundary layers”, *J. Fluid Mech.*, **239**, pp. 195-211, 1992.
- [80] Schopf W., Patterson J.C., “Natural Convection in a side-heated cavity: visualization of the initial flow features”, *J. Fluid Mech.*, **295**, pp. 357-379, 1995.
- [81] Hiller W., Kowalewski T. A., “Simultaneous Measurement of the Temperature and Velocity Fields In Thermal Convective Flows”, *Flow Visualization IV, Hemisphere*, pp. 617-622, Paris, 1987.
- [82] Quénot G. M., “Image Matching Using Dynamic Programming: Application to Stereovision and Image Image Interpolation”, *Proc. IMAGE' COM*, pp. 265-270, 1996.
- [83] Quénot G. M., Pakleza J., Kowalewski T. A., “Particle Image Velocimetry Using Optical Flow for Image Analysis”, *Proc. 8<sup>th</sup> International Symposium on Flow Visualisation*, Sorrento, Italy, 1998.
- [84] Kowalewski T. A., Cybulski A., Sobiecki T., “Experimental Model for Casting Problems”, *Computational Methods and Experimental Measurements*, **1**, pp. 179-188, WIT Press, Southampton, 2001.
- [85] Michalek T., Kowalewski T.A., “Experimental model of mould filling flow”, *Proc. of Eurotherm 69 Seminar, Heat and Mass Transfer In Solid-Liquid Phase Change Processes*, Bistra Castle, Ljubljana, Slovenia, 2003.
- [86] Slattery J.C., “Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua”, *McGraw-Hill, Inc.*, 1972.
- [87] Truesdell C., Toupin R.A., “Handbuch der Physik”, **3** (1), *Springer-Verlag*, Berlin, 1960.
- [88] Woods L.C., „A Note on the Numerical Solution of Fourth Order Differential Equations“, *Aero. Quart.*, **5**, pp. 176-184, 1954.
- [89] Ferziger J.H., Peric M., „Computational Methods for Fluids Dynamics”, 2<sup>nd</sup> Edition, *Springer*, 1999.
- [90] Mallinson G.D., de Vahl Davis G., “The Method of the False Transient for the Solution of Coupled Elliptic Equations”, *J. Comp. Phys.*, **12**, pp.435-461, 1973.
- [91] Samarskii A.A., Andreyev V.B.,”On a High Accuracy Difference Scheme for Elliptic Equations with Several Space Variables”, *USRR Comp. Math. and Math. Phys.*, **3**, pp. 1373-1382, 1963.
- [92] Ralston A., “Wstep do analizy numerycznej”, *PWN*, Warszawa, 1971.
- [93] Golub G., Ortega J.M., „Scientific Computing. An Introduction with Parallel Computing”, *Academic Press Ltd.*, 1993.
- [94] Kelson N.A., “The laminar boundary layer regime for natural convection of air in a square cavity.” *Report 1990/FMT/3*, School of Mechanical and Industrial Engineering, Univ. New South Wales, Kensington, NSW.
- [95] Liu G. R., “Mesh-free Methods”, *CRC Press*, Boca Raton, 2003.
- [96] Atluri S. N., Shen S., “The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method”, *Tech Science Press*, Encino, 2002.
- [97] Sarler B., “Towards Mesh-free Computation of Transport Phenomena”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**, pp. 731-738, 2002.
- [98] De S., Bathe K.J., “The method of finite spheres”, *Computational Mechanics*, **25**, pp. 329-345, 2000.

- [99] Sadat H., Couturier S., “Performance and Accuracy of a Meshless Method For Laminar Natural Convection”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **37**, pp. 455-467, 2000.
- [100] Prax C., Salagnac P., Sadat H., “Diffuse Approximation and Control-Volume-Based Finite-Element Methods: A Comparative Study”, *Numerical Heat Transfer, Part B*, **34**, pp. 303-321, 1998.
- [101] Fluent 6.0., “Users Guide”, *Fluent Inc.*, Lebanon, NH 2002.
- [102] Fidap 8.7., “Users Guide”, *Fluent Inc.*, Lebanon, NH 2002.
- [103] Leonardi E., Kowalewski T. A., Timchenko V., De Vahl Davis G., “Effects of Finite Wall Conductivity on Flow Structures in Natural Convection”, *Proc. of Int. Conf. Comp. Heat and Mass Transfer*, Eds. A.A. Mohamad & I. Sezai, pp. 182-188, Eastern Mediterranean University Printinghouse, Cyprus, 1999.
- [104] Mallinson G. D., De Vahl Davis G., “Three Dimensional Natural Convection in a Box: A Numerical Study”, *J. Fluid Mech.*, **83**, pp. 1-31, 1977.
- [105] Michalek T., Kowalewski T. A., Saler B., “Natural Convection for Anomalous Density Variation of Water: Numerical Benchmark”, *Progress In Computational Fluid Dynamics*, **5** (3-5), pp. 158-170, 2005.
- [106] van Keulen F., Haftka R.T., Kim N.H. „Review of Options for Structural Design Sensitivity Analysis. Part1: Linear System”, *Elsevier Science*, 2004.
- [107] Haftka R.T., “Techniques for thermal sensitivity analysis”, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, **17**, pp.71-80,1981.
- [108] Sosnowski W., “Numeryczna symulacja, analiza wrażliwości i optymalizacja nieliniowych procesów deformacji konstrukcji”, 2003.
- [109] Burg C.O.E., Newman III J.C., “Computationally efficient, numerically exact design space derivatives via the complex Taylor’s series expansion method”, *Computers & Fluids*, **32**, pp. 373-383, 2003.
- [110] Borggaard J., Pelletier D., Turgeon E., “Parametric Uncertainty Analysis for Thermal Fluid Calculations”, *Nonlinear Analysis*, **47**, 4533-4543, 2001.
- [111] Blackwell B.F., Dowding K.J., Cochran R.J., “Development and implementation of sensitivity coefficient equations for heat conduction problems”, *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, **36** (1), 1999.
- [112] Dowding K.J., Blackwell B.F., “Sensitivity analysis for nonlinear heat conduction”, *Journal of Heat Transfer*, **123** (1), 2001.
- [113] Gu Y.X., Chen B.S., Zhang H.W., Grandhi R., “A sensitivity analysis method for linear and nonlinear transient heat conduction with precise time integration”, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **24** (1), 2002.
- [114] Turgeon E., Pelletier D., Borggaard J., “A general continuous sensitivity equation formulation for complex flows”, *Proc. 8<sup>th</sup> AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, *AIAA Paper 2000-4732*, 2000.
- [115] Westerweel J., “Digital Particle Image Velocimetry – Theory and Application”, *Delft University Press*, 1993.
- [116] Hesselink L., “Digital Image Processing in Flow Visualization”, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20**, pp. 421-485, 1988.

- [117] Kowalewski T.A., "Particle image velocimetry and thermometry for two-phase flow problems", *Visualization and Imaging in Transport Phenomena, Annals of the New York Academy of Scs.*, 972, pp.213-219, 2002.
- [118] Westerweel J., Nieuwstadt F. T. M., Flor J. B., "Measurement of Dynamics of Coherent Flow Structures Using Particle Image Velocimetry", *Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, pp. 476-499, 1990.
- [119] Willert C. E., Gharib M., "Digital Particle Image Velocimetry", *Experiments in Fluids*, **10**, pp. 181-193, 1991.
- [120] Raffel M., Willert C., Kompenhans J., „Particle Image Velocimetry. A Practical Guide”, *Springer*, Berlin, 1998.
- [121] Gouriet J. B., Stitou A., Riethmuller M. L., "Practical Implications Of Camera Resolution And Peak Locking In Actual Measurements", *4<sup>th</sup> International Symposium on Particle Image Velocimetry, paper 1012, PIV 01, 2/3, September 17-19, Göttingen, Germany, 2001.*
- [122] Matlab, UserGuide v. 7.0.4, *The MathWorks Inc.*, 1994-2005.
- [123] Kowalewski T.A., Cybulski A. Michalek T., Kowalczyk M. „Laboratoryjne wzorce do walidacji programów odlewniczych”, *Prace IPPT*, Warszawa, 2005.
- [124] Michalek T., Kowalewski T.A., „Numerical Benchmark based on Natural Convection of Freezing Water”, *Proc. Of 4<sup>th</sup> International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, Cachan, Paris, 2005.
- [125] Kowalewski T.A., Rebow M., "An experimental benchmark for freezing water in the cubic cavity", *Adv. In Computational Heat Transfer*, pp. 149-156, Begel House Inc., NY 1998.
- [126] Kowalewski T.A. "Experimental validation of numerical codes in thermally driven flows", *Adv. In Computational Heat Transfer*, pp.1 – 15, Begel House Inc., NY 1998.
- [127] Michalek T., Kowalewski T.A., "Simulations of the water freezing process – numerical benchmarks", *TASK Quarterly*, **7** (3),pp. 389-408, 2003.