2. Weryfikacja symulacji numerycznych przepływów lepkich i

termicznych

W rozdziale tym przedstawiono krótkie wprowadzenie dotyczące matematycznego sformułowania modelu stosowanego przy symulacji przepływów lepkich i termicznych. Następnie zostały zwięźle opisane metody numeryczne, które zostały wykorzystane do stworzenia programów analizujących przedmiotowe przepływy. Przedstawiony został szczegółowy opis programów oraz proces ich weryfikacji. Na koniec zdefiniowano wzorzec numeryczny, który może służyć do weryfikacji programów analizujących przepływy lepkie i termiczne oraz przeprowadzono porównanie efektywności i dokładności różnych programów z wykorzystaniem zdefiniowanego wzorca.

2.1. Matematyczne sformułowanie problemu

Punkt wyjścia dla numerycznej mechaniki płynów dla omawianej klasy przepływów stanowią zasady zachowania masy, pędu i energii. Dla otwartego i spójnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ można zapisać powyższe zasady w kartezjańskim układzie współrzędnych $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ następująco:

• zasada zachowania masy:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t) d\Omega = 0$$
(2.1)

• zasada zachowani pędu:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t) \vec{f}(\vec{x}, t) d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{f}_{pow}(\vec{x}, t) dS$$
(2.2)

• zasada zachowania energii:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{x},t) e_c(\vec{x},t) d\Omega = \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{x},t) \vec{f}(\vec{x},t) \vec{v}(\vec{x},t) d\Omega + \int_{\partial\Omega(t)} \vec{f}_{pow}(\vec{x},t) \vec{v}(\vec{x},t) dS - \int_{\partial\Omega(t)} \vec{q}(\vec{x},t) \vec{n}(\vec{x},t) dS$$
(2.3)

Powyższe równania (2.1)-(2.3) zakładają brak źródeł i upustów masy, pędu oraz mocy cieplnej w obszarze Ω . Równania (2.1)-(2.3) z postaci całkowej można przekształcić do postaci równań różniczkowych korzystając z twierdzenia Reynoldsa o transporcie (szczegółowe wyprowadzenie można znaleźć w pracach [86,87], poniżej przedstawione są istotne założenia przy tego typu przekształceniu).

Dla naszych potrzeb przyjęto założenie o nieściśliwości i stałej wartości lepkości dynamicznej

$$\rho(\vec{x},t) = \rho = const \tag{2.4}$$

$$\mu(\vec{x},t) = \mu = const \tag{2.5}$$

oraz wykorzystano fakt, iż siły powierzchniowe $\vec{f}_{pow}(\vec{x},t)$ można wyrazić przy pomocy tensora naprężeń $\sigma(\vec{x},t)$

$$\vec{f}_{pow}(\vec{x},t) = \vec{\sigma}(\vec{x},t)\vec{n}(\vec{x})$$
(2.6)

Tensor naprężeń można z kolei wyrazić poprzez konstytutywny związek dla płynów newtonowskich

$$\vec{\sigma} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu div\vec{v}\right)\vec{I} + 2\mu\vec{v}$$
(2.7)

przy pomocy tensora prędkości deformacji \vec{v}

$$\vec{\vec{v}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \right)$$
(2.8)

oraz tensora jednostkowego \vec{I} , co w rezultacie pozwala na zapisanie równań (2.1)-(2.2) w postaci równań różniczkowych cząstkowych, które nazywane są równaniami Naviera-Stoksa:

$$div(\vec{v}) = 0 \tag{2.9}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}$$
(2.10)

Przekształcenie równania (2.3) do postaci różniczkowej wymaga przyjęcia kolejnego związku konstytutywnego określającego gęstość przewodzonego strumień ciepła \vec{q} przez brzeg obszaru $\partial \Omega$. Przykładem takiego związku jest prawo Fouriera, które można zapisać następująco:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T \tag{2.11}$$

Wykorzystując prawo Fouriera oraz zakładając stałe wartości ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu c_p (2.12), przewodnictwa cieplnego κ (2.13), lepkości dynamicznej μ (2.5)

$$c_p(\vec{x},t) = c_p = const \tag{2.12}$$

$$\kappa(\vec{x},t) = \kappa = const \tag{2.13}$$

oraz zakładając brak źródeł mocy cieplnej i brak zmian energii wskutek sił masowych, można równanie (2.3) zapisać w formie różniczkowej następująco:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\nabla T) \vec{v} = \kappa \Delta T + 2\mu t r(\vec{\vec{v}} \cdot \vec{\vec{v}})$$
(2.14)

Ostatni człon po prawej stronie określa dyssypację energii wewnętrznej spowodowaną siłami lepkimi i jest zazwyczaj pomijany przy modelowaniu przepływów konwekcyjnych.

Równania (2.10) dla przepływów konwekcyjnych jest powiązane z równaniem (2.13) poprzez postać członu sił masowych \vec{f} . Założenie stałej wartości gęstości ρ w równaniach Naviera – Stoksa (2.9)-(2.10) we wszystkich członach za wyjątkiem członu sił masowych \vec{f} prowadzi do uproszenia zwanego modelem Bousinessqua. Zmiana gęstości płyny wraz z temperaturą, na ogół liniowa, w członie sił masowych odpowiedzialna jest za generację przepływów konwekcyjnych. Przy przyjęciu liniowej zależności zmian gęstości od temperatury, człon sił masowych można zapisać jako:

$$\vec{f} = \rho \beta \vec{g} \left(T - T_{ref} \right) \tag{2.15}$$

W przypadku, gdy zmiana gęstości w funkcji temperatury nie jest liniowa człon ten musi zawierać jawnie podaną zależność gęstości od temperatury postaci:

$$\vec{f} = \vec{g}\rho(T) \tag{2.16}$$

Pełen układ równań różniczkowych opisujących nieściśliwe przepływy lepkie i termiczne dla potrzeb niniejszej pracy z uwzględnieniem powyższych założeń (2.4)-(2.8),(2.12)-(2.13) można przedstawić następujaco:

$$div(\vec{v}) = 0 \tag{2.17}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}$$
(2.18)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p (\nabla T) \vec{v} = \kappa \Delta T$$
(2.19)

Układ równań (2.17)-(2.19) stanowi punkt wyjścia dla metod numerycznych opisanych w następnych podrozdziałach. Wektor sił masowych \vec{f} przyjmuje postać (2.15) lub (2.16) w zależności od własności termo-fizycznych cieczy modelowej. Niewiadomymi są zazwyczaj trzy składowe prędkości $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ciśnienie *p* oraz temperatura *T*.

Poprawne sformułowanie zadania wymaga dodatkowo podania odpowiednich warunków brzegowych określających prędkość i temperaturę, które ogólnie mogą zostać sklasyfikowane następujaco:

warunek brzegowy I rodzaju (warunek Dirichleta)

$$T = T_c \quad na \quad \partial \Omega_* \tag{2.20}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_i \quad na \quad \partial \Omega_* \tag{2.21}$$

$$\vec{v} = 0 \quad na \quad \partial \Omega_*$$
 (2.22)

• warunek brzegowy II rodzaju (warunek von Neumanna)

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad na \quad \partial \Omega_* \tag{2.23}$$

• warunek brzegowy III rodzaju (warunek mieszany)

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \alpha \left(T - T_{ext} \right) \quad na \quad \partial \Omega_* \tag{2.24}$$

Typ warunków brzegowych jest dostosowany do wykorzystywanej geometrii obliczeniowej i fizycznego charakteru problemu. Warunki brzegowe określające prędkość definiuje się zazwyczaj przy pomocy warunków I rodzaju (2.21) – (2.22), natomiast do określenia warunków na temperaturę wykorzystuje się wszystkie trzy rodzaje (2.20),(2.23),(2.24). Termiczne warunki brzegowe oraz warunki brzegowe na prędkość zdefiniowane są na pewnych podobszarach $\partial \Omega_*$ pokrywając cały brzeg domeny obliczeniowej $\partial \Omega$. Równania różniczkowe z warunkami brzegowymi oraz warunkami początkowymi na prędkość v_0 i temperaturę T_0 w obszarze Ω stanowią problem początkowo – brzegowy, który jest przedmiotem rozważań numerycznej mechaniki płynów dla omawianej klasy przepływów.

2.2. Metoda różnic skończonych (SOLVSTR)

W rozdziale tym przedstawiono opis metody różnic skończonych wykorzystanej do stworzenia programu SOLVSTR. Program ten rozwiązuje równania Naviera – Stoksa przetransformowane do równań na wirowość i funkcję prądu wraz z równaniem przewodnictwa ciepła. Opisano zastosowane metody i schematy numeryczne, a także przedstawiono proces weryfikacji programu przy pomocy istniejących wzorców numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych.

2.2.1. Opis metody

Bezpośrednie rozwiązywanie numeryczne równań Naviera – Stoksa dla przepływów nieściśliwych jest utrudnione ze względu na postać członu ciśnieniowego. Występuje w nim gradient ciśnienia, który jest niewiadomą. Z tego względu ciśnienie musi zostać wyliczone przy pomocy równania (2.9), w którym w sposób jawny nie występuje. Problem ten jest kluczowy i nie trywialny przy rozwiązywaniu równań Naviera – Stoksa toteż stworzono szereg metod, które polegają na przekształceniu równań (2.9)-(2.10) do postaci nie zawierającej w sposób jawny ciśnienia. Jedną z nich jest metoda, wykorzystana w programie SOLVSTR, która polega na transformacji równań (2.9)-(2.10) do równań na wirowość ϖ oraz funkcję prądu ψ . Wirowość ϖ definiuje się następująco:

$$\vec{\omega} = rot\vec{v}$$

(2.25)

Dla przepływów płaskich wirowość ma jedną składową i przedstawiona jest dalej w postaci skalarnej. Natomiast funkcja prądu ψ dla przepływów płaskich jest funkcją skalarną dwóch zmiennych spełniających następujące warunki:

$$v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tag{2.26}$$

$$v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2.27}$$

Dzięki takiemu podstawieniu równanie ciągłości (2.9) jest spełnione tożsamościowo. Obliczając rotację obu stron równania (2.10) otrzymamy równanie ewolucyjne na wirowość zwane równaniem transportu wirowości, które nie zawiera ciśnienia:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = v \Delta \omega + rot \vec{f}$$
(2.28)

Dodatkowe równanie wiążące wirowość z funkcją prądu otrzymuje się po podstawieniu warunków (2.26)-(2.27) do równania (2.25), otrzymując następującą zależność:

 $-\Delta \Psi = \omega$

(2.29)

Równania (2.28)-(2.29) oraz równanie (2.19) stanowią punkt wyjścia do konstrukcji równań różnicowych, które następnie rozwiązuje się numerycznie. Konieczne jest również przetransformowanie warunków brzegowych na prędkość tak, aby otrzymać warunki brzegowe na wirowość i funkcję prądu. Warunki brzegowe dla funkcji prądu wynikają bezpośrednio z jej definicji, natomiast warunek brzegowy na wirowość jest otrzymywany z równania (2.29) przy założeniu z góry rzędu dokładności. Dla potrzeb programu SOLVSTR została wykorzystana formuła Woodsa [88] drugiego rzędu dokładności.

Kolejnym istotnym etapem budowy programu jest przyjęcie odpowiednich skal bezwymiarowych, które wykorzystuje się do ubezwymiarowienia równań (2.28)-(2.29) i (2.19). Wybór ten jest podyktowany charakterem modelowanego przepływu. Opierając się na analizie wymiarowej przeprowadzonej przez Bejana [76] zaimplementowano trzy rodzaje skal bezwymiarowych do transformacji zmiennych wymiarowych do bezwymiarowych. Okazuje się bowiem, iż odpowiednie przyjęcie tych skal ułatwia proces numerycznego rozwiązania zadania.

Ze względu na to, iż poprawność programu SOLVSTR zostanie zweryfikowana w oparciu o wzorce numeryczne dotyczące modelowania stacjonarnych płaskich przepływów konwekcyjnych dla geometrii w kształcie kwadratu o długości L, w którym ruch wywołany jest na skutek różnicy temperatur $\Delta T = T_h - T_c$ pomiędzy przeciwległymi pionowymi bokami kwadratu, zdecydowano się, na podstawie analizy wymiarowej [76], zaimplementować dwa różne typy skal bezwymiarowych dla przepływów lepkich i termicznych. Pierwsza skala jest właściwa gdy różnica temperatur ΔT jest niewielka, a wynikowy stan stacjonarny charakteryzuje się równowagą pomiędzy konwekcją a przewodnictwem. Wtedy człon konwekcyjny i przewodnościowy w równaniu (2.19) są podobnego rzędu. Wychodząc z tej zależności można otrzymać następujące zmienne bezwymiarowe:

$$\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c) \quad X_1 = x_1/L \quad X_2 = x_2/L \quad V_1 = \rho c_p v_1 L/\kappa \quad V_2 = \rho c_p v_2 L/\kappa \quad (2.30)$$

W przypadku gdy różnica temperatur ΔT jest duża, a lepkość płynu jest niewielka tworzą się warstwy przyścienne wzdłuż pionowych krawędzi. Ruch odbywa się jedyni w pobliżu krawędzi, toteż zakładamy iż, człon wypornościowy musi równoważyć człon konwekcyjny w równaniu (2.28). Bezwymiarową skalą dla prędkości jest oszacowana, na podstawie analizy wymiarowej, maksymalna wartość prędkość osiągana wzdłuż pionowych krawędzi. Wtedy zmienne bezwymiarowe mają następującą postać:

$$\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c) \quad X_1 = x_1/L \quad X_2 = x_2/L \quad V_1 = \rho c_p v_1 L / \kappa R a^{\frac{1}{2}} \quad V_2 = \rho c_p v_2 L / \kappa R a^{\frac{1}{2}}$$
(2.31)

Dodatkowo, aby móc przeprowadzić weryfikację kodu przy pomocy wzorca numerycznego zdefiniowanego przez Ghia i współautorów [39] wprowadzono skalę, która jest użyteczna, gdy mamy do czynienia z konwekcją wymuszoną poprzez z góry zadaną wartość prędkości jednej ze ścian \vec{v}^* . Wzorzec ten dotyczy rozwiązywania równań (2.28)-(2.29), z wyłączeniem równania energii (2.19), a zastosowanie znajduja następujące zmienne bezwymiarowe:

$$X_1 = x_1 / L \quad X_2 = x_2 / L \quad V_1 = v_1 / v_1^* \quad V_2 = v_2 / v_2^*$$
(2.32)

Szczegółowe wyprowadzenie powyższych skal oraz wyjaśnienie zasad analizy wymiarowej, która została wykorzystana do ich wyprowadzenia można znaleźć w książce Bejana [76].

Program SOLVSTR został stworzony do analizowania przepływów, które obejmują trzy wymienione wyżej przypadki. Toteż rozwiązywane są następujące bezwymiarowe równania (2.33)-(2.35) z stałymi F_1 , F_2 , F_3 , K_1 , K_2 , P_1 , P_2 , P_3 , B zgodnie z Tabelą 2.1.

$$F_{1}\frac{\partial\omega}{\partial t} + K_{1}\left(V_{1}\frac{\partial\omega}{\partial X_{1}} + V_{2}\frac{\partial\omega}{\partial X_{2}}\right) = P_{1}\Delta\omega - B\frac{\partial\theta}{\partial X_{1}}$$
(2.33)

$$F_2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = P_2 \Delta \Psi + \omega \tag{2.34}$$

$$F_{3}\frac{\partial\theta}{\partial t} + K_{2}\left(V_{1}\frac{\partial\theta}{\partial X_{1}} + V_{2}\frac{\partial\theta}{\partial X_{2}}\right) = P_{3}\Delta\theta$$
(2.35)

| Skala | F ₁ | F_2 | F_3 | K ₁ | K ₂ | P ₁ | P ₂ | P ₃ | В |
|--------|----------------|-------------------|------------------|-----------------------|-------------------|----------------|----------------|----------------|-------------------|
| (2.30) | 1/γω | $1/\gamma_{\psi}$ | 1/γ _θ | 1/Pr | 1 | 1 | 1 | 1 | Ra |
| (2.31) | 1/γω | $1/\gamma_{\psi}$ | 1/γ _θ | Ra ^{1/2} /Pr | Ra ^{1/2} | 1 | 1 | 1 | Ra ^{1/2} |
| (2.32) | 1/γω | $1/\gamma_{\psi}$ | - | Re | - | 1 | 1 | - | 0 |

Tabela 2.1. Zestawienie wykorzystanych skal bezwymiarowych w programie SOLVSTR

Poprzez ubezwymiarowienie problem konwekcji naturalnej dla płaskiej geometrii o kształcie kwadratu można zdefiniować podając dwie bezwymiarowe liczby: liczbę Rayleigha ($Ra = \rho^2 c_p g \beta \Delta T L^3 / \mu \kappa$), która określa stosunek sił wypornościowych do sił lepkościowych oraz liczbę Prandtla ($Pr = \mu c_p / \kappa$), która charakteryzuje płyn. Przy modelowaniu przepływu z pominięciem zjawisk cieplnych wystarczy określić liczbę Reynoldsa (*Re*), która określa stosunek sił bezwładności do sił lepkościowych.

W przypadku gdy poszukiwanym stanem dla powyższych równań (2.33)-(2.35) jest stan stacjonarny stałe F_1 , F_2 , F_3 zawierają współczynniki relaksacyjne $1/\gamma_{\omega}, 1/\gamma_{\psi}, 1/\gamma_{\theta}$, których wartości nie wpływa na końcowy stan stacjonarny. Z tego względu mogą być tak dobierane by zapewnić optymalną zbieżność iteracyjną. Takie podejście pozwala na bardziej efektywne rozwiązywanie problemu i nosi nazwę metody całkowania w pseudoczasie [89,90] (*ang. false transient metod*). Jednakże w przypadku gdy chcemy otrzymać wyniki niestacjonarne wystarczy przyjąć $F_1=F_2=F_3=\rho L^2/\mu$. dla skal (2.30) i (2.32) oraz $F_1=F_2=F_3=\rho c_p L^2/\kappa \cdot Ra^{-0.5}$ dla skali (2.31).

Program SOLVSTR wykorzystuje siatki kartezjańskie, równomierne o stałej odległości pomiędzy węzłami siatki równe h (por. rysunek 2.1). Do dyskretyzacji przestrzennej równań (2.33)-(2.35) wykorzystano centralny schemat różnic skończonych (CDS) [89], którego wzory różnicowe dla pierwszej i drugiej pochodnej dla dowolnej funkcji Φ mają następującą postać:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Big|_{P} = \frac{\Phi_{E} - \Phi_{W}}{2h} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Big|_{P} = \frac{\Phi_{N} - \Phi_{S}}{2h}$$
(2.36)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\Big|_{P} = \frac{\Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W}{h^2} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\Big|_{P} = \frac{\Phi_N - 2\Phi_P + \Phi_S}{h^2}$$
(2.37)

W powyższych wzorach indeks dolny oznacza wartość funkcji Φ w węźle siatki oznaczonym tym indeksem zgodnie z rysunkiem 2.1. Do dyskretyzacji czasowej wykorzystano schemat jawno - niejawny Cranka-Nicolsona [89], który dla ogólnego równania:

$$\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t} = f(t,\Phi(t,x)) \tag{2.38}$$

można zapisać następująco:

$$\Phi^{t+1} = \Phi^{t} + \frac{1}{2} \Big[f(t, \Phi^{t}) + f(t+1, \Phi^{t+1}) \Big] \cdot \Delta t$$
(2.39)

Przy pomocy powyższego wzoru można wyliczyć wartość funkcji Φ^{t+1} w kolejnym kroku czasowym na podstawie wartości funkcji Φ^t w poprzednim rozwiązując linowy układ równań algebraicznych. Zastosowanie wzorów różnicowych (2.36)-(2.37) oraz schematu (2.39) pozwala przekształcić równania (2.33)-(2.35) w trzy układy równań liniowych, które ze względu na wzajemne sprzężenie muszą być rozwiązywane jednocześnie.



Rys. 2.1. Molekuła obliczeniowa

Macierze algebraicznych układów równań liniowych powstałych w wyniku opisanej powyżej dyskretyzacji są rzadkie lecz ich wymiar jest proporcjonalny do ilości wezłów siatki dla każdej niewiadomej funkcji. W przypadku, gdy niewiadomymi są trzy składowe prędkości, ciśnienie i temperatura zachodzi konieczność rozwiązywania kolejno pięciu układów równań o wymiarze proporcjonalnym do ilości węzłów siatki (ang. segregated algorithm) lub w przypadku zastosowania algorytmów sprzężonych (ang. coupled) jednego układu równań o wymiarze proporcjonalnym do ilość wezłów siatki pomnożonym przez ilość poszukiwanych funkcji (w tym przypadku 5). W obydwu przypadkach zachodzi konieczność rozwiązywania tych równań z wykorzystaniem metod iteracyjnych rozwiązywania równań liniowych. Można wykorzystać na przykład metodę Gaussa - Seidla, jednakże metoda ta charakteryzuje się zbyt dużą złożonością i wolną zbieżnością iteracyjną, toteż zdecydowano się przekształcić każdy z wynikowych układów równań liniowych przy pomocy metody ADI [91] na dwa układy o tym samym wymiarze z trójdiagonalnymi macierzami współczynników. W wyniku otrzymamy sześć układów trójdiagonalnych, które sa rozwiązywane algorytmem typu TDMA [89] o złożoności liniowej. Sposób takiej dyskretyzacji zostanie przedstawiony przykładowo dla równania (2.34) dla zagadnienia płaskiego. Równanie to po zastosowaniu schematów (2.37)-(2.38) oraz formuły (2.39) tworzy układ równań liniowych, którego macierz w każdym wierszu ma co najwyżej pięć niezerowych współczynników. Macierz ta może być generowana na bieżąco przechodząc kolejno po węzłach siatki (złożoność takiej operacji jest proporcjonalna do ilości węzłów siatki). Przykładowy wiersz takiej macierzy, uwzględniając notację z Rysunku 2.1. można zapisać następująco:

$$\left(1 + \frac{2\gamma_{\psi}\Delta t}{h^{2}}\right)\Psi_{P}^{t+1} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{N}^{t+1} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{S}^{t+1} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{W}^{t+1} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{E}^{t+1} = \left(1 - \frac{2\gamma_{\psi}\Delta t}{h^{2}}\right)\Psi_{P}^{t} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{N}^{t} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{S}^{t} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{W}^{t} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{E}^{t} + \gamma_{\psi}\omega_{P}^{t}\Delta t$$
(2.40)

Równanie (2.40) jest zastępowane dwoma układami równań trójdiagonalnych, zgodnie z metodą ADI, które są rozwiązywane kolejno po sobie. Faktoryzacja równania (2.40) prowadzi do dwóch układów równań postaci:

$$-\frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{W}^{*} + \left(1 + \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{h^{2}}\right)\Psi_{P}^{*} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{E}^{*} = \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{N}^{t} + \left(1 - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{h^{2}}\right)\Psi_{P}^{t} + \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{S}^{t} + \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2}\omega_{P}^{t}(2.41)$$
$$-\frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{N}^{t+1} + \left(1 + \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{h^{2}}\right)\Psi_{P}^{t+1} - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{E}^{t+1} = \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{W}^{*} + \left(1 - \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{h^{2}}\right)\Psi_{P}^{*} + \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2h^{2}}\Psi_{E}^{*} + \frac{\gamma_{\psi}\Delta t}{2}\omega_{P}^{t}(2.41)$$
$$(2.42)$$

Istotny jest również fakt, że macierze układów równań (2.41) i (2.42) mają dominujące przekątne, co oznacza, że układy te są nieoznaczone oraz dobrze uwarunkowane [92]. Metody iteracyjne rozwiązywania układów liniowych są zbieżne dla macierzy tej klasy.

Przy pomocy opisanego powyżej sposobu postępowania dyskretyzowane są równania (2.35)-(2.37). Jednakże ze względu na to iż równania te nie są liniowe oraz wzajemnie sprzężone zachodzi konieczność rozwiązywania ich iteracyjnie. W każdej iteracji wewnętrznej rozwiązywanych jest sześć układów równań liniowych trójdiagonalnych postaci (2.41)-(2.42). Rozwiązując układ równań na wirowość ω pozostałe niewiadome takie jak temperatura θ czy składowe prędkości v_1, v_2 (oblicza się je przy pomocy funkcji prądu Ψ , patrz równania (2.26)-(2.27)) traktowane są jako znane i podstawia się pod nie wartości otrzymane w poprzedniej iteracji. Pełny algorytm rozwiązywania sprzężonych równań (2.35)-(2.37) w celu osiągnięcia stanu stacjonarnego można zapisać następująco:

Algorytm 2.1.

(1) generacja siatki

(2) inicjacja warunków początkowych i brzegowych

(3) t=0

 $(4) t = t + \Delta t$

(5) wylicz wartości funkcji prądu Ψ^{t+1} w kolejnym kroku czasowym t+1 (na podstawie równań – (2.41)-(2.42))

(6) znajdź wartości składowych prędkości (równania (2.26) – (2.27))

(7) wylicz wartość wirowości ω^{t+1} w kolejnym kroku czasowym

(8) wylicz wartości temperatury θ^{t+1} w kolejnym kroku czasowym

(9) sprawdź zbieżność, jeśli $\|\Psi^{t+1} - \Psi^t\|_2$ oraz $\|\omega^{t+1} - \omega^t\|_2$ jest dostatecznie małe to zakończ

obliczenia, w przeciwnym przypadku wróć do punku (4).

Każda iteracja (4)-(9) powyższego algorytmu wymaga w instrukcjach (5),(7),(9) rozwiązania dwóch układów równań liniowych postaci (2.41)-(2.42), które w programie SOLVSTR są rozwiązywane metodą TDMA. Można te układy równań rozwiązywać również innymi iteracyjnymi metodami rozwiązywania układów liniowych, na przykład metodą Gaussa – Seidla [92], CG, czy GMRES [93]. Rozwiązywanie układów równań liniowych jest najbardziej czasochłonnymi obliczeniowo etapem przedstawionego algorytmu.

2.2.2 Weryfikacja programu SOLVSTR

W celu weryfikacji kodu SOLVSTR wykonano obliczenia numeryczne dla wzorców numerycznych zdefiniowanych w pracach Ghia i współautorów [39], de vahl Davisa [15] oraz Le Quere [16]. Otrzymane wyniki porównano z tymi wzorcami w celu określenia dokładności stworzonego oprogramowania i poznania jego ograniczeń, w tym zakresu stosowalności.

Pierwszy z wykorzystanych wzorców został zdefiniowany przez Ghia i współautorów [39] w 1982 roku i dotyczy izotermicznego, nieściśliwego i lepkiego przepływu płaskiego płynu newtonowskiego w naczyniu ograniczonym trzema nieruchomymi i jedną ruchomą ścianką (ang. moving lid cavity problem). Przepływ jest wymuszony poprzez warunek brzegowy na górnej krawędzi kwadratu. Do obliczeń autorzy wzorca wykorzystali metodę wielosiatkową i podali rezultaty dla liczb Reynoldsa równych 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500 i 10000.

Program SOLVSTR w celu rozwiązania przedmiotowego wzorca rozwiązuje równania (2.33)-(2.34) wykorzystując zmienne bezwymiarowe (2.32). Zadanie rozwiązano dla liczb Reynoldsa równych 100,400,1000,3200,5000,7500,10000 na kartezjańskich siatkach o wymiarach 33x33, 65x65, 129x129, 257x257, 513x513 zagęszczanych jednorodnie. Przykładowe rozwiązania zostały przedstawione na Rysunku 2.2, na których przedstawiono pole prędkości wraz z polem



Rys. 2.2. Pole prędkości oraz kontury funkcji prądu dla liczb Reynoldsa z zakresu od 100 do 10000

Rys. 2.3. Porównanie otrzymanych rozwiązań na czterech siatkach z rozwiązaniem referencyjnym dla liczb Reynoldsa 100,5000,10000. Porównano profile pionowej składowej prędkości wzdłuż Y=0.5, (a),(c),(e), poziomej składowej prędkości wzdłuż X=0.5 (b),(d),(f).

funkcji prądu. Dodatkowo zostały porównane profile prędkości pionowej V_2 wzdłuż prostej przecinającej poziomo domenę obliczeniową (Y=0.5) oraz profile prędkości poziomej V_1 wzdłuż prostej przecinającej pionowo domenę obliczeniową (X=0.5) uzyskanych przy pomocy różnych siatek obliczeniowych z wynikami referencyjnymi [39]. Porównanie profili prędkości zostało przedstawione na Rysunku 2.3

Dodatkowo w celu obliczenia współczynnika zbieżności siatki – GCI (por 1.26), określenia rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązań (1.21) oraz oszacowania estymatora błędu rozwiązania (1.17) porównano ekstremalne (maksymalne i minimalne) wartości składowej prędkości V₂ wzdłuż profilu X = 0.5 oraz składowej prędkości V₁ wzdłuż profilu Y = 0.5 (Rysunek 2.3). Sumaryczne zestawienie współczynnika zbieżności siatki GCI, rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązań numerycznych *p* oraz estymatora błędu rozwiązania ε zostało przedstawione w Tabeli 2.2 dla liczb Reynoldsa Re = 100 (a) oraz Re = 5000 (b).

Otrzymane wyniki dla niższych liczb Reynoldsa pozwalają na oszacowanie błędu rozwiązania na siatce 65x65 na około 8 %, na siatce 129x129 - 2 %, na siatce 257x257 - 0.3% oraz na siatce 513x513 – 0.01% (biorąc pod uwagę wartości współczynnika GCI) co pozwala stwierdzić iż program SOLVSTR prawidłowo rozwiązał zdefiniowany wzorzec, a najdokładniejsze rozwiązanie otrzymane na siatce 513x513 obarczone jest błędem około 0.1% (największa otrzymana wartość współczynnika GCI dla tej siatki). Dodatkowo można stwierdzić, że rzeczywisty rząd zbieżności p programu jest w przybliżeniu równy teoretycznemu rzędowi zbieżności i wynosi 2.

Dla wyższych liczb Reynoldsa (Re >= 5000) dokładność otrzymanych wyników jest znacznie gorsza. Rozwiązanie otrzymane na siatce 257x257 obarczone błędem wynoszącym nawet 17 % wyliczonym dla maksymalnej wartości poziomej składowej prędkości (Tabela 2.2.b). Rzeczywisty rząd zbieżności *p* dla takiej liczby Reynoldsa zmniejszył się i wynosi około 1. Takie zachowanie programu wraz ze zwiększaniem wartości liczby Reynoldsa jest oczekiwane gdyż wraz z zwiększaniem się tej liczby pogarsza się uwarunkowanie liniowego układu równań będącego wynikiem dyskretyzacji równania (2.33) – przestaje być spełniony warunek silnie dominującej przekątnej. Z tego powodu metoda iteracyjna rozwiązywania takich układów charakteryzuje się niższym rzędem zbieżności, a co za tym idzie dłuższym czasem obliczeń.

| Siatka | min V_2 | GCI | р | Е |
|---------|-----------|-----------------|----------|------------------|
| 33x33 | -0,222240 | | | |
| 65x65 | -0,241399 | 0,079367(8 %) | | 0,025545(2.5%) |
| 129x129 | -0,246071 | 0,018986(2 %) | 2,03591 | 0,006288(0.6 %) |
| 257x257 | -0,247051 | 0,003967(0.3 %) | 2,253187 | 0,00132(0.13 %) |
| 513x513 | -0,247027 | 9,72E-05(0.01%) | 5,351675 | 3,24E-05(0.003%) |

| Siatka | $max V_2$ | GCI | р | Е |
|---------|-----------|----------------|----------|-----------------|
| 33x33 | 0,157937 | | | |
| 65x65 | 0,171513 | 0,079154(8%) | | 0,018101(2%) |
| 129x129 | 0,175274 | 0,021458(2%) | 1,85187 | 0,007101(0.7%) |
| 257x257 | 0,176481 | 0,006839(0.7%) | 1,639691 | 0,002274(0.2%) |
| 513x513 | 0,176541 | 0,00034(0.03%) | 4,330319 | 0,000113(0.01%) |

| Siatka | min V_1 | GCI | р | Е |
|---------|-----------|----------------|----------|----------------|
| 33x33 | -0,196911 | | | |
| 65x65 | -0,208160 | 0,05404(5%) | | 0,014998(1.4%) |
| 129x129 | -0,211241 | 0,014585(1.4%) | 1,868326 | 0,004838(0.4%) |
| 257x257 | -0,211836 | 0,002809(0.2%) | 2,372437 | 0,000935(0.1%) |
| 513x513 | -0,212065 | 0,00108(0.1%) | 1,377542 | 0,00036(0.04%) |

a) Re =100

| Siatka | Min V_2 | GCI | р | Е |
|---------|-----------|---------------|----------|---------------|
| 33x33 | -0,320896 | | | |
| 65x65 | -0,613754 | 0,477159(47%) | | 0,137215(13%) |
| 129x129 | -0,477550 | 0,285214(28%) | 1,104432 | 0,105048(10%) |
| 257x257 | -0,551242 | 0,133684(13%) | 0,886189 | 0,042656(4%) |
| | | | | |
| Siatka | $Max V_2$ | GCI | p | Е |
| 33x33 | 0,232566 | | | |
| 65x65 | 0,471858 | 0,507127(50%) | | 0,144587(14%) |
| 129x129 | 0,360791 | 0,307843(30%) | 1,107342 | 0,114335(11%) |
| 257x257 | 0,434014 | 0,168711(17%) | 0,601061 | 0,053238(5%) |
| | | | | |
| Siatka | Min V_1 | GCI | р | Е |
| 33x33 | -0,235292 | | | |
| 65x65 | -0,498794 | 0,528278(52%) | | 0,149714(14%) |
| 129x129 | -0,366129 | 0,362345(36%) | 0,990026 | 0,137358(13%) |
| 257x257 | -0,431652 | 0,151796(15%) | 1,017714 | 0,048157(5%) |

b) Re = 5000

Tabela 2.2. Zestawienie współczynników zbieżności GCI (1.26), estymatora błędu ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczb a) Re = 100 b) Re = 5000.

Kolejnym wzorcem numerycznym wykorzystanym do weryfikacji programu SOLVSTR jest wzorzec opublikowany przez Grahama de Vahl Davisa [15] w 1983 roku, który dotyczy przepływów lepkich i termicznych. Geometrię obliczeniową również stanowi kwadrat, przepływ jest dwuwymiarowy, wywołany różnicą temperatur pomiędzy pionowymi ściankami kwadratu, podczas gdy poziome ścianki kwadratu są adiabatyczne. Rozwiązanie wzorcowe zostało podane dla stałej liczby Prandtla Pr = 0.71 (odpowiadające przepływowi w powietrzu) oraz dla liczb Rayleigha równych kolejno Ra = 10^3 , 10^4 , 10^5 , 10^6 . Rozwiązanie zostało otrzymane przy użyciu schematu różnic centralnych drugiego rzędu, a błąd zbieżności rozwiązania oszacowano przy pomocy ekstrapolacji Richardsona na poziomie 0.1%, 0.2%, 0.3% oraz 1% dla kolejnych liczb Rayleigha.

Program SOLVSTR w celu rozwiązania niniejszego wzorca rozwiązuje równania (2.33)-(2.35) wykorzystując zmienne bezwymiarowe (2.30). Przykładowe kontury funkcji prądu Ψ oraz bezwymiarowej temperatury θ wraz z polem prędkości dla kolejnych liczb Rayleigha otrzymane programem SOLVSTR zostały przedstawione na Rysunku 2.4. Na poniższych rysunkach widoczne są stany stacjonarne dla liczby Rayleigha (Ra =10³) (a-b), Ra = 10⁴ (c-d), a także dla liczby Ra = 10⁵ (e-f). Na rysunkach tych widoczną są stany stacjonarne charakterystyczne dla niskich liczb Rayleigha z prawie jednorodnym gradientem temperatury (a,b), następnie stan stacjonarny przejściowy dla umiarkowanych liczb Rayleigha (c,d), w którym człon konwekcyjny równań ruchu jest w równowadze z członem przewodnościowym oraz na koniec stan stacjonarny charakterystyczny dla wysokich liczb Rayleigha (e,f), w którym konwekcja odgrywa najistotniejszą rolę (tworzy się termiczna warstwa przyścienna).

W Tabeli 2.3. zostały zestawione współczynniki określające zbieżność rozwiązań wykonanych na jednorodnie zagęszczonych siatkach kartezjańskich o wymiarach 25x25, 50x50 oraz 100x100. Dla niższych liczb Rayleigh (Ra= 10^3) otrzymano rzeczywisty rząd zbieżności powyżej trzech co jest wynikiem niewielkiego wpływu członów konwekcyjnych. Otrzymany rząd zbieżności jest większy od teoretycznego rzędu zbieżności wynoszącego dwa. Jednakże wraz ze wzrostem liczby Rayeligha rzeczywisty rząd zbieżności rozwiązań maleje i wynosi około dwa. Dokładność kolejnych rozwiązań (biorąc pod uwagę współczynnik GCI) jest równa odpowiednio 0.2 %, 0.4 % i 0.6 % dla Ra = 10^3 , 10^4 , 10^5 . Nie jest to wynik gorszy od tego uzyskanego przez de vahl Davisa

[15], gdyż współczynnik GCI jest bardziej restrykcyjny (patrz Rozdział 1.2) przy oszacowywaniu błędu zbieżności rozwiązań. Oszacowanie błędu przy pomocy ekstrapolacji Richardsona ε daje oszacowanie podobne do tego, które otrzymał de vahl Davis, a mianowicie 0.05%, 0.1%, 0.2%.

Rys. 2.4. Kontury funkcji prądu Ψ – *lewa kolumna a*),*c*),*e*) *oraz kontury temperatury* θ – *prawa kolumna b*),*d*),*f*) *dla liczb Rayleigha, a*),*b*) *Ra* = 10³ , *c*),*d*) *Ra* = 10⁴ , *e*),*f*) *Ra* = 10⁵

| | Siatka | Max V_1 | GCI | р | ε |
|---|---------------------------------|---|-----------------|----------|------------|
| ĺ | 25x25 | 3,54939 | | | |
| ĺ | 50x50 | 3,6371 | 2.5% | | 0.8% |
| ĺ | 100x100 | 3,64296 | 0.1% | 3,90 | 0.05% |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | Siatka | $Max V_2$ | GCI | p | ε |
| | Siatka 25x25 | <i>Max V</i> ₂ 3,663069 | GCI | р | З |
| | <i>Siatka</i> 25x25 50x50 | <i>Max V</i> ₂ 3,663069 3,695571 | <i>GCI</i> 0.8% | <i>p</i> | ε 0.05% |

a) $Ra = 10^3$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż X=0.5 oraz V_2 wzdłuż Y=0.5.

| Siatka | Max V_1 | GCI | р | ε |
|---------|-----------|------|------|------|
| 25x25 | 15,9505 | | | |
| 50x50 | 16,1291 | 1.1% | | 0.3% |
| 100x100 | 16,1840 | 0.3% | 1.70 | 0.1% |
| | | | | |
| Siatka | $Max V_2$ | GCI | p | Е |
| 25x25 | 19,20643 | | | |
| 50x50 | 19,66843 | 2,3% | | 0.8% |
| 100x100 | 19,74552 | 0.4% | 2,58 | 0.1% |

b) $Ra = 10^4$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż X=0.5 oraz V_2 wzdłuż Y=0.5.

| | Siatka | Max V_1 | GCI | p | Е |
|---|---------|-----------|-------|------|-------|
| | 25x25 | 35,12051 | | | |
| | 50x50 | 34,99876 | 0.3% | | 0.1% |
|] | 100x100 | 34,96479 | 0.09% | 1,84 | 0.03% |
| _ | | | | | |
| | Siatka | Max V_2 | GCI | р | ε |
| | 25x25 | 61.9295 | | | |

9%

0.6%

3.94

2.9%

0.2%

c) $Ra = 10^5$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż X=0.5 oraz V_2 wzdłuż Y=0.5.

68.1170

68.5198

50x50

100x100

Tabela 2.3. Zestawienie współczynników zbieżności GCI(1.26), ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczb a) $Ra = 10^3$ b) $Ra = 10^4$ c) $Ra = 10^5$.

Wraz ze wzrostem liczby Rayleigha przepływ zmienia swój charakter (Ra >= 10⁶). Dominującym efektem dla takich przepływów jest konwekcja. Obserwuje się tworzenie termicznych warstw przyściennych. Z tego względu konieczne jest zastosowanie odpowiednich skal bezwymiarowych do rozwiązywania równań (2.33)-(2.35). Na podstawie analizy wymiarowej [76] wyprowadzona zostały skala bezwymiarowa (2.31) odpowiednia dla tego reżimu przepływu. Ubezwymiarowienie to polega na przyjęciu jako skali prędkości maksymalną wartość prędkości osiąganą w warstwie przyściennej. Wartość ta jest proporcjonalna do $\kappa Ra^{0.5}/\rho c_p L$. Zastosowanie tej skali pozwoliło na uzyskanie rozwiązań dla liczby Rayleigha Ra = 10⁶,10⁷,10⁸. Uzyskane wyniki zostały porównane z wynikami wzorca numerycznego podanego przez Patrika Le Quere [16] w 1999 roku oraz innymi wynikami numerycznymi podanymi przez Kelsona [94] oraz Haldenwanga [65]. Symulacje numeryczne przeprowadzone przez Le Quere i Haldenwanga wykorzystywały do aproksymacji przestrzennej wielomiany Chebysheva, natomiast symulacje Kelsona schemat różnic centralnych. Porównywaną wartością dla wszystkich wymienionych wyżej symulacji jest wartość liczby Nusselta, wyliczona wzdłuż prostej X = 0.5L, zdefiniowana w następujący sposób:

$$Nu_{\frac{1}{2}} = \int_{0}^{1} \left(Ra^{\frac{1}{2}} v_1 \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right) (x_1 = 0.5, x_2) dx_2$$
(2.43)

Ponadto porównano wartości maksymalnych i minimalnych wartości składowych prędkości wzdłuż profili X = 0.5L i Y= 0.5L oraz oszacowano błąd zbieżności rozwiązania przy pomocy ekstrapolacji Richardsona (1.17) i indeksu zbieżności na siatce GCI (1.26). Dla liczby Ra = 10^6 błąd zbieżności rozwiązania1 % biorąc pod uwagę estymator błędu (1.17), natomiast dla Ra = 10^7 i 10^8 odpowiednio 1.7 % i 6.4 %. Jako oszacowanie błędu zbieżności rozwiązań w przybliżeniu dla wszystkich trzech przypadków był zbliżony do teoretycznego rzędu zbieżności i wynosił dwa. Porównano również wartości liczby Nusselta wyliczone przy pomocy programu SOLVSTR z wynikami innych programów dostępnych w literaturze (por. Tabela 2.5). Największe rozbieżności zauważalne są dla liczby Ra = 10^8 , dla której określono największy błąd zbieżności wynoszący 6.4 %. Warto zauważyć jednak, że dla tej liczby Rayleigha przepływ jest bliski reżimu przejściowego, z widocznymi źródłami zaburzeń warstwy przyściennej . Takie same zaburzenia zaobserwowano w symulacjach wykonanych metodami spektralnymi [16].

| Siatka | Max V_1 | GCI | p | ε |
|---------|-----------|-------|------|-------|
| 65x65 | 0.07182 | | | |
| 129x129 | 0.06629 | 8 % | | 2.8 % |
| 257x257 | 0.06437 | 3 % | 1.53 | 0.9 % |
| | | | | |
| Siatka | Max V_2 | GCI | p | ε |
| 65x65 | 0.24040 | | | |
| 129x129 | 0.21915 | 9.7 % | | 3.3 % |
| 257x257 | 0.21278 | 3 % | 1.74 | 0.9 % |

a) $Ra = 10^{6}$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż X=0.5 oraz V_2 wzdłuż Y=0.5.

| Siatka | Max V_1 | GCI | p | Е |
|---------|-----------|-------|------|-------|
| 65x65 | 0.05571 | | | |
| 129x129 | 0.04953 | 12.4% | | 4.3 % |
| 257x257 | 0.04709 | 5.2 % | 1.34 | 1.7 % |
| | | | | |
| Siatka | Max V_2 | GCI | р | ε |
| 65x65 | 0.25072 | | | |
| 129x129 | 0.22926 | 9.3 % | | 3 % |
| 257x257 | 0.22675 | 1.1% | 3.09 | 0.4 % |

b) $Ra = 10^7$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż X=0.5 oraz V_2 wzdłuż Y=0.5.

| Siatka | Max V_1 | GCI | р | ε |
|---------|-----------|------|------|-------|
| 65x65 | 0.08690 | | | |
| 129x129 | 0.04689 | 85 % | | 39 % |
| 257x257 | 0.03967 | 18 % | 2.47 | 6.4% |
| | | | | |
| Siatka | Max V_2 | GCI | р | ε |
| 65x65 | 0.20355 | | | |
| 129x129 | 0.22758 | 10 % | | 3.4 % |
| 257x257 | 0.22303 | 2 % | 2.4 | 0.7 % |

c) $Ra = 10^8$. Ekstremalne wartości składowej V_1 wzdłuż X=0.5 oraz V_2 wzdłuż Y=0.5.

Tabela 2.4. Zestawienie współczynników zbieżności GCI(1.26), ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczb a) $Ra = 10^6$ b) $Ra = 10^7$ c) $Ra = 10^8$.

| Program \ Ra | 10^{6} | 10 ⁷ | 10^{8} |
|--------------------|----------|-----------------|----------|
| SOLVSTR | 8.730 | 16.722 | 30.773 |
| Le Quere [16] | 8.825 | 16.523 | 30.225 |
| Haldenwang [65] | | 16.550 | 30.260 |
| Kelson [93] | | 16.500 | 30.200 |
| De Vahl Davis [15] | 8 799 | - | - |

Tabela 2.5. Porównanie liczby Nusselta wyliczonej dla profilu X = 0.5 (2.43) dla liczb Rayleigha $Ra = 10^6, 10^7, 10^8.$

Rys. 2.5. Pole prędkości wraz z konturami funkcji prądu Ψ – *lewa kolumna a*),*c*),*e*) *oraz konturami temperatury* θ – *prawa kolumna b*),*d*),*f*) *dla liczb Rayleigha, a*),*b*) *Ra* = 10⁶, *c*),*d*) *Ra* = 10⁷, *e*),*f*) *Ra* = 10⁸

2.3. Metoda bezsiatkowa (SOLVMEF)

Metody bezsiatkowe należą do nowych metod, nie mających jeszcze dużego praktycznego zastosowania w mechanice płynów. Tym niemniej elastyczność tych metod, uzyskiwana dzięki uniknięciu skomplikowanego etapu generowania siatki obliczeniowej przy opisie niemal dowolnych geometrii, jest bardzo atrakcyjna dla zastosowań przemysłowych. Metody bezsiatkowe pozwalają na szybsze wyznaczenie współczynników układu równań algebraicznych dla całego obszaru obliczeniowego przy użyciu dowolnie rozłożonego zbioru punktów. Punkty te mogą być generowane wewnątrz domeny obliczeniowej równomiernie lub losowo. Dodatkowo punkty można w łatwy sposób zagęszczać w najbardziej interesujących rejonach przez dodawanie kolejnych, uzyskując dzięki temu odpowiednik siatek adaptacyjnych. Istnieje wiele odmian metod bezsiatkowych z różnego typu aproksymacjami – obszerny ich przegląd można znaleźć w książkach Liu [95] lub Alturi [96]. Do tej pory jedynie kilka z nich zostało zastosowanych do rozwiązywania prostych problemów transportu ciepła i masy [38,97,98].

2.3.1. Opis metody

W ramach niniejszej pracy stworzono oparty o metodę bezsiatkową program numeryczny SOLVMEF, rozwiązujący zagadnienie przepływu konwekcyjnego. W implementacji metody zdecydowano się wykorzystać podejście oparte o aproksymację DAM (z ang. *Diffuse Approximation Method*), będący średniokwadratową aproksymacją najmniejszych kwadratów pól skalarnych i ich pochodnych. Dokładny opis metody w zastosowaniu do przepływów lepkich i termicznych można znaleźć w pracach Sadat [99] oraz Prax [100]. Metoda może być zastosowana do dowolnego rozmieszczenia punktów kolokacyjnych. Dla uproszczenia procedury testowej w naszych obliczeniach, prezentowanych w dalszej części niniejszej pracy, ograniczono się do równomiernego rozkładu punktów. Przy tak uproszczonym podejściu i przy zastosowaniu najprostszej postaci tzw. funkcji bazowych: $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$, wzory różnicowe na pierwsze i drugie pochodne dowolnej funkcji można wyprowadzić analitycznie.

Aproksymacja DAM pierwszych i drugich pochodnych skalarnej funkcji Φ w dowolnym punkcie P wyraża się prostymi wzorami, przypominającymi wzory różnicowe:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{m_1 (\Phi_E - \Phi_W) + m_2 (\Phi_{NE} - \Phi_{NW}) + m_2 (\Phi_{SE} - \Phi_{SW})}{2hm_1 + 4hm_2}$$
(2.44)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{m_1 \left(\Phi_N - \Phi_S\right) + m_2 \left(\Phi_{NW} - \Phi_{SW}\right) + m_2 \left(\Phi_{NE} - \Phi_{SE}\right)}{2hm_1 + 4hm_2}$$
(2.45)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{\Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W}{h^2} \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = \frac{\Phi_N - 2\Phi_P + \Phi_S}{h^2}$$
(2.47)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\Phi_{SW} + \Phi_{NE} - \Phi_{NW} - \Phi_{NE}}{4h^2}$$
(2.48)

We wzorach *h* oznacza odległość pomiędzy sąsiednimi punktami, tak jak na Rysunku 2.1., a Φ_P , Φ_N , Φ_S , Φ_W , Φ_E , Φ_{NW} , Φ_{NE} , Φ_{SW} , Φ_{SE} oznaczają wartości funkcji aproksymowanej w punktach będących w bezpośrednim sąsiedztwie punktu P, natomiast m_1 , m_2 oznaczają wartości tzw. funkcji wagowej. Funkcja wagowa określa zakres oddziaływania aproksymacji i najczęściej jest przyjmowana w postaci:

$$m(P,Z) = \begin{cases} \exp\left[-\ln(10)\left(\frac{r}{h\sqrt{2}}\right)^2\right] & dla \quad r \le h\sqrt{2} \\ 0 & dla \quad r > h\sqrt{2} \end{cases}$$
(2.49)

gdzie *r* jest odległością pomiędzy punktem P a Z (Z jest dowolnym punktem z otoczenia punktu P, $m_1=m(P,N)=m(P,S)=m(P,E)=m(P,W), m_2=m(P,NE)=m(P,NW)=m(P,SE)=m(P,SW)$).

Powyższe wzory różnicowe zostały zastosowane do dyskretyzacji równań (2.33)-(2.35) w celu otrzymania trzech układów równań liniowych. Macierze układów otrzymanych z zastosowaniem opisanej aproksymacji są rzadkie, a ilość niezerowych współczynników w każdym wierszu macierzy jest ściśle związana z ilością punktów wziętych pod uwagę dla wyprowadzenia wzorów różnicowych. Każda *molekuła obliczeniowa* (rys. 2.1.) składa się z dziewięciu punktów. Zatem w każdym wierszu macierzy otrzymano nie więcej niż dziewięć niezerowych współczynników. Jednak z uwagi na trudności efektywnej faktoryzacji tak powstałej macierzy, otrzymany układ musi być rozwiązywany klasyczną metodą Gaussa – Seidla. Nie jest to optymalne i jest to jeden z powodów ograniczających szersze stosowanie tej wersji metody bezsiatkowej.

2.3.2 Weryfikacja programu SOLVMEF

W celu weryfikacji kodu SOLVMEF wykonano obliczenia numeryczne dla wzorców numerycznych wykorzystanych w poprzednim rozdziale. Otrzymane wyniki porównano w celu określenia dokładności stworzonego oprogramowania i poznania jego ograniczeń, w tym zakresu stosowalności.

Wzorzec numeryczny obejmujący modelowanie przepływu w kanale z ruchomą ścianką (Ghia i współautorzy [39]) został rozwiązany dla liczb Reynoldsa Re = 100 i 400 (Rysunek 2.6). Dla wyższych liczb Reynoldsa nie udało się uzyskać rozwiązań z oszacowaniem błędu poniżej 5%. Fakt ten świadczy o tym, iż zastosowana aproksymacja nie zapewnia dostatecznej dokładności w przypadkach, gdy mamy do czynienia z ruchem w obrębie wysokich liczb Reynoldsa. Toteż wykorzystana aproksymacja nie jest odpowiednia do symulacji, w których nieliniowe efekty są najistotniejsze.

Obliczenie rzeczywistego współczynnika zbieżności dla liczby Reynlodsa Re = 100 dało oczekiwany wynik około dwóch (Tabela 2.6) lecz oszacowania estymatora błędu dało wynik rzędu 5 %, co jest wynikiem dużo gorszym w porównaniu z programem SOLVSTR. Jednakże błąd wyliczony na podstawie ekstrapolacji Richardsona dla Ra = 100 jest mniejszy niż 1.5%, a porównanie wartości składowych prędkości V₁ (wzdłuż Y=0.5) oraz V₂ (wzdłuż X=0.5) jest zadawalające, co pozwala stwierdzić poprawną zbieżność rozwiązań dla umiarkowanych liczb Reynoldsa.

Kolejnym wzorcem numerycznym wykorzystanym do weryfikacji programu SOLVMEF jest wykorzystany w poprzednim rozdziale wzorzec opublikowany przez Grahama de Vahl Davisa [15]. Podobnie jak dla programu SOLVSTR wykonano obliczenia dla kolejnych liczb Rayleigha Ra = 10^3 , 10^4 , 10^5 przy stałej liczbie Prandlta Pr = 0.71. W wyniku otrzymano pola temperatury, funkcji prądu i prędkości analogiczne do tych przedstawionych na Rysunku 2.4. Porównano również wartości składowych prędkości V₁ wzdłuż prostej Y=0.5 oraz V₂ wzdłuż prostej X=0.5 otrzymane przy jednorodnym zagęszczaniu punktów kolokacyjnych (25x25, 50x50, 75x75, 100x100 punktów). Na rysunku 2.7 zostały zestawione profile dla kolejnych liczb Rayleigha.

a) Re = 100 Rys. 2.6. Pole prędkości oraz kontury funkcji prądu dla liczb Reynoldsa Re=100 i Re = 400 (metoda bezsiarkowa).

| Siatka | Min V_2 | GCI | Р | Е |
|---------|-----------|------------------|------|------------------|
| 33x33 | -0,199036 | | | |
| 65x65 | -0,235061 | 0,153258 (15 %) | | 0,048557 (4.8 %) |
| 129x129 | -0,247014 | 0,04839 (5%) | 1,59 | 0,015858 (1.5 %) |
| | | | | |
| Siatka | $Max V_2$ | GCI | Р | Е |
| 33x33 | 0,144294 | | | |
| 65x65 | 0,169843 | 0,150427 (15 %) | | 0,047703 (4.7 %) |
| 129x129 | 0,175837 | 0,034088 (3.4 %) | 2,09 | 0,011224 (1.1 %) |
| | | | | |
| Siatka | Min V_1 | GCI | P | Е |
| 33x33 | -0,198762 | | | |
| 65x65 | -0,208900 | 0,04853 (4.8 %) | | 0,015904 (1.5 %) |
| 129x129 | -0,211259 | 0,011166 (1.1 %) | 2,10 | 0,003705 (0.3 %) |

Tabela 2.6. Zestawienie współczynników zbieżności GCI(1.26), ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczby Reynoldsa Re = 100 (metoda bezsiatkowa).

Rys. 2.7. Profile prędkości dla kolejnych liczb Reynoldsa, (a),(c),(e)profile pionowej składowej prędkości wzdłuż Y=0.5, (b),(d),(f) profile poziomej składowej prędkości wzdłuż X=0.5 (metoda bezsiatkowa).

Wyliczone wartości rzeczywistego współczynnika zbieżności dla programu SOLVMEF dla niniejszego wzorca, zamieszczono w Tabeli 2.7, wykazały one poprawną zbieżność zastosowanej metody. Wyniki dla liczby Ra = 1000 otrzymano z błędem około 0.2%, dla Ra = 10000 z błędem około 0.4%, natomiast dla Ra = 100000 z błędem około 1.1 %. Otrzymano dokładność na podobnym poziomie co przy pomocy programu SOLVSTR, jednakże szybkość wykonania liczona w ilości iteracji (iteracje (4)-(9) Algorytmu 2.1.) była cztery razy mniejsza dla programu SOLVMEF, a co za tym idzie czas obliczeń dla tego programu był krótszy. Takie zachowanie programu jest wynikiem zastosowanej aproksymacji DAM. Jest to ściśle związane z charakterystyczną cechą tej aproksymacji (patrz równania (2.44)-(2.48)), a mianowicie tego, iż w aproksymacji pochodnych wykorzystywane są wartości we wszystkich dziewięciu najbliższych punktach kolokacyjnych, w przeciwieństwie do klasycznych metod w których wykorzystuje się zazwyczaj dwa lub trzy sąsiednie (w zależności od kierunku liczenia pochodnej). Toteż w zadaniach, w których dominującym zjawiskiem jest dyfuzja, w naszym przypadku ciepła (konwekcja naturalna przy niskich liczbach Rayleigha), metoda ta pozwala uzyskać lepszą zbieżność. Fakt ten potwierdza również wartość rzeczywistego współczynnika zbieżności, którego

wyliczona wartość dla niniejszego wzorca (Tabela 2.7) jest wyższa od wartości teoretycznej równej dwa.

Wraz ze wzrostem liczby Rayleigha efekty konwekcyjne stają się bardziej istotne, czego efektem jest wzrost znaczenia członów nieliniowych w równaniach Naviera-Stokesa. Podobnie jak dla poprzedniego wzorca aproksymacja bezsiatkowa okazała się mało dokładna dla przypadków, w których dominują efekty nieliniowe (konwekcyjne). Nie udało się uzyskać rezultatów z błędem zbieżności poniżej 10 % dla wyższych liczb Rayleigha z wykorzystaniem wyżej opisanej aproksymacji bezsiatkowej.

| Siatka | Max V_1 | GCI | р | Е |
|---------|-----------|------|------|-------|
| 25x25 | 3,549602 | | | |
| 50x50 | 3,612997 | 1.7% | | 0.5% |
| 100x100 | 3,617497 | 0.1% | 3,82 | 0.04% |

| Siatka | Max V_2 | GCI | р | Е |
|---------|-----------|------|------|-------|
| 25x25 | 3,663174 | | | |
| 50x50 | 3,696443 | 0.9% | | 0.3% |
| 100x100 | 3,704403 | 0.2% | 2,06 | 0.07% |

| Siatka | $Max V_2$ | GCI | р | ε |
|---------|-----------|------|------|------|
| 25x25 | 19,214741 | | | |
| 50x50 | 19,670120 | 2.3% | | 0.7% |
| 100x100 | 19.746010 | 0.4% | 2.58 | 0.1% |

a) $Ra = 10^3$

| Siatka | Max V_1 | GCI | p | Е |
|---------|-----------|------|------|------|
| 25x25 | 15,95022 | | | |
| 50x50 | 16,131201 | 1.1% | | 0.4% |
| 100x100 | 16,18453 | 0.3% | 1,76 | 0.1% |

b)
$$Ra = 10^4$$

| Siatka | Max V_2 | GCI | р | Е |
|---------|-----------|------|------|------|
| 25x25 | 62,114860 | | | |
| 50x50 | 68,127281 | 8.8% | | 2.8% |
| 100x100 | 68,520858 | 0.5% | 3,93 | 0.2% |

| Siatka | Max V_1 | GCI | р | Е |
|---------|-----------|------|------|-------|
| 25x25 | 35,702129 | | | |
| 50x50 | 35,03445 | 1.9% | | 0.6% |
| 100x100 | 34,96875 | 0.2% | 3,34 | 0.06% |

c)
$$Ra = 10^5$$

Tabela 2.7. Zestawienie współczynników zbieżności GCI (1.26), ε (1.17) oraz rzeczywistego rzędu zbieżności rozwiązania p (1.21) dla liczb a) $Ra = 10^3$ b) $Ra = 10^4$ c) $Ra = 10^5$. Zbieżność oszacowano na podstawie ekstremalnych wartości poziomej składowej prędkości V_1 wzdłuż X = 0.5L oraz pionowej składowej prędkości V_2 wzdłuż Y = 0.5L.

2.4. Wzorzec numeryczny dla przepływów lepkich i termicznych

Niniejszy podrozdział zawiera definicje wzorca numerycznego zaproponowanego do sprawdzenia dokładności i wydajności programów numerycznych używanych w symulacjach numerycznych przepływów lepkich i termicznych. Stosując ten wzorzec określono dokładności rozwiązań otrzymanych za pomocą różnych algorytmów i oceniono ich przydatność.

Do rozwiązania zdefiniowanego wzorca numerycznego wykorzystano programy opisane w poprzednich podrozdziałach SOLVSTR (rozdział 2.2) oparty na metodzie różnic skończonych, SOLVMEF (rozdział 2.3) oparty na metodzie bezsiatkowej, a także dwa kody komercyjne FLUENT [101] (metoda objętości skończonych) i FIDAP [102] (metoda elementów skończonych) oraz uniwersytecki kod FRECON3V [103,104] oparty na metodzie różnic skończonych.

2.4.1. Definicja wzorca

W celu określenia dokładności każdego z testowanych programów zdefiniowano wzorzec numeryczny (ang. *benchmark solutnion*), który ma umożliwić wstępną analizę dokładności obliczeń modeli numerycznych stosowanych do symulacji przepływów termicznych [105]. Wzorzec opisuje zjawisko konwekcji naturalnej wody w pobliżu temperatury krzepnięcia w różnicowo grzanym kwadracie. Domena obliczeniowa odpowiada również konfiguracji eksperymentalnej z różnicowo grzanym sześcianem, która zostanie opisany w Rozdziale 4. Dla uproszczenia, w zadaniu numerycznym ograniczono się do analizy dwuwymiarowego pola przepływu w przekroju centralnym sześcianu. Przepływ generowany jest różnicą temperatur $T_h =$ 283K i $T_c = 273K$, ustaloną dla przeciwległych pionowych ścianek izotermicznych. Dla pozostałych ścianek naczynia przyjęto adiabatyczne warunki brzegowe. Ze względu na małe zmiany temperatury w przepływie, a także dla uproszczenia wzorca numerycznego, przyjęto stałe wartości wszystkich własności materiałowych, za wyjątkiem gęstości wody. Gęstość wody w pobliżu punktu krzepnięcia wykazuje silnie nieliniową zależność od temperatury. Toteż zachodzi konieczność reprezentacji członu sił masowych postaci (2.16), w którym zależność gęstości od temperatury *T* w Kelvinach wyraża się następującą zależnością [68]:

 $\rho(T) = -5150.43 + 78.48118 \cdot T - 0.3769827 \cdot T^2 + 8.10902 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 - 6.621398 \cdot 10^{-7} \cdot T^4$ (2.50) Wybór wzorca podyktowany jest dużą wrażliwością na błędy symulacji numerycznej struktur przepływu generowanych w takiej konfiguracji. Nieliniowość przebiegu funkcji gęstości powoduje, że nawet ten prosty układ przepływowy stanowi trudne do dokładnego odwzorowania zadanie numeryczne (Kowalewski, Redow, [68]). Zaproponowany wzorzec numeryczny pozwala na porównanie wydajności kodów numerycznych oraz oszacowanie ich dokładności. Dwuwymiarową reprezentację problemu opisuje podstawowy układ równań (2.17)-(2.18) i (2.19). Przyjmując jako warunek początkowy zerowe pole prędkości oraz temperaturę $T_{init} = 278K$, poszukiwano stanu stacjonarnego przepływu.

Bezwymiarowe liczby charakteryzujące powyższy przepływ to liczba Rayleigha Ra i liczba Prandtla Pr. Wzorzec został zdefiniowany dla $Ra = 1.503 \, 10^6$ oraz Pr = 13.31. Należy zwrócić uwagę na umowność wartości liczby Rayleigha zdefiniowanej dla materiałów o nieliniowej charakterystyce termicznej. Podana wartość odnosi się do referencyjnej temperatury 273K (temperatura krzepnięcia wody). W zakresie temperatur 273K - 283K, ze względu na anomalię gęstości wody, liczba Rayleigha zmieniłaby się wielokrotnie dla innej temperatury referencyjnej.

Celem zwiększenia stabilności kodu i zmniejszenia wpływu błędów zaokrąglenia (*round-off errors*), część z opisanych programów numerycznych operuje w zmiennych bezwymiarowych. Bezwymiarowa temperatura \mathcal{G} , współrzędne X, Y oraz składowe prędkości V_1, V_2 są zdefiniowane w oparciu o skalę podana we wzorze (2.30).

2.4.2. Procedura weryfikacyjna

Do rozwiązania powyżej sformułowanego problemu użyto pięć opisanych wcześniej kodów numerycznych opartych na różnych metodach dyskretyzacji (metoda różnic skończonych, metoda objętości skończonych, metoda elementów skończonych, metoda bezsiatkowa). Porównania dokonano po weryfikacji każdego z kodów numerycznych przeprowadzając porównanie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz liczby Nusselta otrzymanych na kolejno zageszczanych siatkach obliczeniowych (tzw. test wrażliwości siatki). Po wybraniu rozwiązania referencyjnego przeprowadzono porównawczą analizę błędów. Poniżej omówiono rezultaty przeprowadzonego testu i podstawowe dane ilościowe. Dla każdego z testowanych kodów numerycznych podano tabelarycznie ekstremalne wartości prędkości wewnątrz naczynia oraz średnią wartość liczby Nusselta na prawej, zimnej ściance. Dodatkowo podano wartości ekstremalne prędkości na poziomej linii przecinającej centralnie kuwetę (Y=0.5) oraz pionowej linii przecinającej centralnie kuwetę (X=0.5). Poniżej w pierwszej kolejności omówiono podstawowe cechy rozwiązań otrzymanych przy użyciu omawianych programów, zwracając uwagę na zachowanie się wartości globalnych i na czas obliczeń. Porównanie globalnych wartości okazało się nie wystarczające dla oceny wydajności różnych metodologii rozwiązywania powyższego zadania. Okazuje się, że zbieżność wartości globalnych nie gwarantuje dokładności odtworzenia struktury przepływu. Dla przeanalizowania tego parametru zaproponowany nowa metode wervfikacii rozwiązań numerycznych, polegająca na analizie średnich błędów profili prędkości i temperatury ekstrahowanych dla wybranych, charakterystycznych przekrojów. Rezultaty tej analizy przedstawiono w punkcie 2.4.3 tego podrozdziału.

FRECON3V (metoda różnic skończonych)

Pierwszym z przetestowanych kodów numerycznych jest trójwymiarowy kod FRECON3V oparty na metodzie różnic skończonych. FRECON3V [103] jest zmodyfikowaną wersja kodu, który powstał w University of New South Wales w Sydney, i został wykorzystany w pracy do stworzenia bazy porównawczej rozwiązań. Algorytm programu pozwala na rozwiązywanie równań przepływu i energii dla stałej, ortogonalnej siatki obliczeniowej. Ogranicza to praktycznie stosowalność programu jedynie do różnych wariantów geometrii prostopadłościanu. Dla uniknięcia problemów z członem ciśnieniowym algorytm programu rozwiązuje układ równań przepływu płynu nieściśliwego w zmiennych wirowości i potencjału prędkości [104]. Zastosowanie półjawnej metody ADI (Alternating Direction Implicit) dla zmiennych przestrzennych i nad-relaksacji całkowania w czasie (*false transient*), pozwala na szybkie rozwiązywanie problemów przepływowych w trzech wymiarach. Prosta struktura programu, duża szybkość i dokładność obliczeń to podstawowe zalety omawianego kodu. Dzięki możliwości programowego zdefiniowanie funkcyjnych zależności temperaturowych dla lepkości, gestości, ciepła właściwego i współczynnika przewodnictwa cieplnego, FRECON3V mógł również być wykorzystany w obecnych badaniach do analizy wpływu zmiennych własności materiałowych płynu na strukturę przepływu.

FRECON3V wykorzystuje do reprezentacji zmiennych tzw. potencjał wektorowy, sprawiający problemy przy definicji warunków brzegowych i w złożonych geometriach. Reprezentacja taka jest też często przyczyną kłopotów ze spełnieniem przez rozwiązania równania ciągłości. Okazało się jednak, że FRECON3V jest najefektywniejszym ze względu na czas obliczeniowy i najdokładniejszym jeśli chodzi o odwzorowanie struktury przepływu. Rozwiązania uzyskano dla stopniowo zagęszczanych prostokątnych jednorodnych, kartezjańskich siatek obliczeniowych. Ponieważ porównania dotyczą problemu płaskiego, przyjęto symetryczne warunki brzegowe i 5 węzłów obliczeniowych dla trzeciego wymiaru. W praktyce dla wektora prędkości oznacza to przyjęcie na tej granicy zerowania składowej normalnej i założenie poślizgu składowych stycznych prędkości. Dla pola temperatury przyjmuje się zerowanie strumienia ciepła w trzecim wymiarze, realizowane przez adiabatyczne warunki brzegowe. Dwuwymiarowe rozwiązania dla tak postawionego problemu zostały uzyskane dla siatek o rosnącej od 21x21 do 301x301 liczbie węzłów obliczeniowych. Wyniki tych obliczeń, oznaczone skrótem FRE, przedstawiono w Tabeli

2.8. W pierwszej części tabeli podano globalne wartości ekstremalne dla składowych prędkości i średnią wartość liczby Nusselta obliczoną dla prawej (zimnej) ścianki kuwety. W drugiej części tabeli zostały zestawione wartości minimalne i maksymalne składowych prędkości na prostych przecinających kuwetę poziomo (Y=0.5) i pionowo (X=0.5). Warunek zbieżności określony dla residuów wynosił 10^{-9} . Czas obliczeń wydłużał się z trzecią potęgą rozmiaru siatki obliczeniowej, od 180 sek. dla siatki najrzadszej (FRE1) do około 3.6×10^{5} sek. dla siatki najgęstszej (FRE7). Czasy obliczeń zdefiniowano dla egzekucji programu na stacji roboczej pracującej w 32bitowym systemie operacyjnym Linux i wyposażonej w procesor Pentium4 HT/3GHz, 2GB RAM. Analiza zbieżności pozwoliła uznać rozwiązanie FRE7 za wzorcowe i rezultaty opisanych dalej symulacji odniesiono do tego rozwiązania.

Wektory prędkości oraz kontury temperatury otrzymane dla siatki 201x201 (FRE6) przedstawia rys. 2.8. Możemy tu wyróżnić dwie główne cyrkulacje płynu. Pierwsza cyrkulacja, zgodna z ruchem wskazówek zegara, odpowiada za transport płynu ogrzewanego na lewej gorącej ściance. Po osiągnięciu krawędzi gorącej ścianki ogrzana ciecz przemieszcza się poziomo wzdłuż górnej adiabatycznej ścianki, po czym nie osiągając przeciwległej ścianki zimnej zawraca wzdłuż przekątnej naczynia, podążając zgodnie z izolinią maksymalnej gęstości płynu. Druga, anomalna cyrkulacja, generowana jest wzdłuż zimnej ścianki. Wyporność wody rośnie ze spadkiem temperatury poniżej 277K i w związku z tym ochłodzona ciecz porusza się wzdłuż ścianki zimnej w kierunku ścianki górnej. Zimny strumień cieczy zderza się ze strumieniem gorącej cieczy unoszonej przez pierwotną cyrkulację. W ten sposób anomalia gęstości wody stworzyła ciekawą i jednocześnie trudna do symulacji numerycznych strukturę przepływu z tzw. punktem siodłowym utworzonym w miejscu kolizji obu cyrkulacji. Ze uwagi na wrażliwość takiej struktury na niedokładności numeryczne i zmiany warunków brzegowych jest ona szczególnie predysponowana do weryfikacji kodów numerycznych.

| Lp | Siatka | U_{min} | U_{max} | V _{min} | V_{max} | Nu _c |
|------|---------|-----------|-----------|------------------|-----------|-----------------|
| FRE1 | 21x21 | -141.9 | 101.4 | -225.6 | 215.2 | 7.05 |
| FRE2 | 41x41 | -156.1 | 101.1 | -177.0 | 213.1 | 6.98 |
| FRE3 | 81x81 | -158.7 | 102.9 | -175.7 | 217.3 | 6.60 |
| FRE4 | 121x121 | -158.8 | 103.1 | -175.8 | 221.4 | 6.52 |
| FRE5 | 161x161 | -159.1 | 103.3 | -175.9 | 222.0 | 6.49 |
| FRE6 | 201x201 | -159.2 | 103.3 | -175.9 | 221.9 | 6.48 |
| FRE7 | 301x301 | -159.2 | 103.4 | -176.0 | 222.5 | 6.47 |

 Tabela 2.8. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczby Nusselta dla programu FRECON3V

Rys. 2.8. Naturalna konwekcja wody w różnicowo grzanym kwadracie. Kontury temperatury i wektory prędkości otrzymane w obliczeniach kodem FRECON3V

FLUENT (metoda objętości skończonych)

Jednym z powszechniej stosowanych pakietów obliczeniowych numerycznej mechaniki płynów jest program FLUENT [101]. Dzięki zastosowaniu metody objętości skończonych i całkowego sformułowania zasad zachowania masy i pędu (2.1)-(2.3), możliwy jest elastyczny wybór niestrukturalnych i nieortogonalnych siatek obliczeniowych. Program pozostawia użytkownikowi dużą swobodę wyboru modelu fizycznego, algorytmu numerycznego oraz schematów dyskretyzacji pochodnych przestrzennych i czasowych. Zaletą tego programu jest możliwość definiowania własnych modułów (tzw. *user defined function*), odpowiedzialnych za odwzorowanie własności materiałowych, warunków brzegowych czy też modyfikacje samego algorytmu numerycznego. W obliczeniach prezentowanych w pracy wykorzystywano tą możliwość do zaimplementowania w obliczeniach nieliniowej zależności gęstości od temperatury (2.49).

Obliczenia wykonane programem FLUENT wykonano dla kilku jednorodnych siatek kartezjańskich, a uzyskane wartości ekstremalne, oznaczone skrótem FLU, przedstawiono w Tabeli 2.9. Obliczenia wykonano poszukując stacjonarnego rozwiązania przepływu laminarnego, stosując metodę projekcyjną SIMPLEC do wyznaczenia wartości ciśnienia oraz schemat dyskretyzacji przestrzennej QUICK. Czas obliczeń tym programem jest znacznie dłuższy niż miało to miejsce w dla poprzedniego kodu numerycznego. W związku z tym pierwotnie obliczenia wykonywano z pojedynczą precyzją zmiennoprzecinkowej reprezentacji liczb. Jednak uzyskiwane wyniki, porównane z wzorcem FRE6, wykazywały znaczne błędy, nawet dla bardzo gęstych siatek obliczeniowych (190x190 i 380x380). W związku z tym wszystkie inne rozwiązania prezentowane w niniejszej pracy poszukiwano w podwójnej precyzji. W rezultacie testów kod oceniono jako stosunkowo wolny ale zapewniający uzyskanie dokładnego rozwiązania przy odpowiednim zagęszczeniu siatki.

| Lp | Siatka | U _{min} | U _{max} | V _{min} | V _{max} | Nu _c |
|------|---------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| FLU0 | 38x38 | -158.94 | 105.31 | -172.38 | 208.12 | 6.59 |
| FLU1 | 76x76 | -159.39 | 103.57 | -173.61 | 220.60 | 6.47 |
| FLU2 | 190x190 | -159.77 | 103.51 | -174.57 | 223.21 | 6.51 |
| FLU3 | 380x380 | -159.73 | 103.55 | -174.73 | 223.52 | 6.50 |

Tabela 2.9. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczbyNusselta dla programu FLUENT

FIDAP (metoda elementów skończonych)

Kolejnym z kodów numerycznych wykorzystanych w tej pracy jest program FIDAP v. 8.7.0 [102]. Podobnie jak uprzednio opisany pakiet obliczeniowy, FIDAP umożliwia stosowanie w symulacjach szerokiej gamy modeli fizycznych i algorytmów numerycznych. Dyskretyzacja w Program FIDAP oparta jest na metodzie elementów skończonych. Rozwiązanie nieliniowego układu równań, będącego wynikiem dyskretyzacji metodą elementu skończonego może być uzyskane metodami projekcyjnymi, przy wykorzystaniu rozdzielania zmiennych ciśnienia od zmiennych prędkości lub metodami sprzężonymi.

Stacjonarne dwuwymiarowe rozwiązanie dla wzorcowego problemu otrzymano programem FIDAP, stosując kwadratowe elementy z funkcjami kształtu drugiego stopnia (elementy Hermite'a). Nieliniowy układ równań będący wynikiem dyskretyzacji został rozwiązany przez rozdzielanie zmiennych ciśnienia i prędkości. W Tabeli 2.10 zebrano wyniki dotyczące ekstremów globalnych dla składowych prędkości uzyskane dla dwóch siatek, otrzymane dla residuów na poziomie 10⁻⁴. Główną zaletą programu FIDAP jest szybkość obliczeń, zadanie FID1 rozwiązuje się pięć razy szybciej niż odpowiadające mu gęstością siatki zadanie FLU0 z zastosowaniem kodu FLUENT. Wyniki otrzymane dla wybranych punktów kontrolnych nawet dla rzadkich siatek 38x38 (FID1) wydają się bardzo zbliżone do tych uzyskanych dla znacznie gęstszych siatek poprzednich kodów. Jednakże ich dokładniejsza analiza, uwzględniająca skomplikowaną strukturę przepływu wykazała znaczące rozbieżności w porównaniu ze wzorcem (por. rys. 2.10).

| Lp | Siatka | U_{min} | U_{max} | V_{min} | V_{max} | Nu _c |
|------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------------|
| FID1 | 39x39 | -155.10 | 104.30 | -178.07 | 227.02 | 6.64 |
| FID2 | 77x77 | -159.03 | 105.38 | -174.93 | 225.17 | 6.44 |

Tabela 2.10. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczbyNusselta dla programu FIDAP

SOLVSTR (metoda różnic skończonych – opis rozdział 2.2)

Mimo, że reprezentacja równań w kodzie SOLVSTR jest podobna do zastosowanej w kodzie FRECON3V, jednakże kod SOLVSTR jest z założenia tylko dwuwymiarowy i dzięki temu może korzystać z nie sprawiającej kłopotów numerycznych skalarnej funkcji prądu. Szybkość programu SOLVSTR przy rozwiązywaniu zadanego problemu była porównywalna z osiąganą przez program FRECON3V. Szacunkowy czas rozwiązania zadania z siatką obliczeniową 200x200 (przy akceptowalnym residuum < 10^{-9}) wynosił 10^5 sekund. Jednak obserwowana zbieżność rozwiązania była znacznie wolniejsza niż w przypadku kodu FRECON3V, utrudniając nawet dla najgęstszych siatek osiągnięcie rezultatów różniących się od wzorca mniej niż 1%. W efekcie porównania dokładności odwzorowania struktury przepływu programu SLOVSTR wypadł gorzej w porównaniu z programem Fluent i Frecon (Tabela 2.16).

| Lp | Siatka | U_{min} | U_{max} | V _{min} | V_{max} | Nu _c |
|------|---------|-----------|-----------|------------------|-----------|-----------------|
| STR1 | 50x50 | -178.51 | 116.425 | -191.450 | 248.063 | 6.63 |
| STR2 | 100x100 | -168.73 | 108.743 | -183.605 | 237.538 | 6.78 |
| STR3 | 150x150 | -165.34 | 106.777 | -180.327 | 232.612 | 6.73 |
| STR4 | 200x200 | -163.60 | 105.728 | -179.554 | 229.670 | 6.67 |
| STR5 | 250x250 | -162.45 | 105.047 | -177.356 | 227.635 | 6.65 |

Tabela 2.11. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczbyNusselta dla programu SOLVSTR

SOLVMEF (metoda bezsiatkowa – opis rozdział 2.3)

Powyżej sformułowany problem rozwiązano również metodą bezsiatkową z wykorzystaniem opisanej wcześniej aproksymacji DAM. Jak wspomniano, rozwiązywanie otrzymanego w wyniku aproksymacji algebraicznego układu równań wymaga znacznie dłuższego czasu obliczeń w porównaniu z innymi kodami. Czas obliczeniowy potrzebny do otrzymania zbieżności na poziomie 10⁻⁶ na siatce obliczeniowej 100x100 okazał się około 50 razy dłuższy niż dla analogicznego przypadku rozwiązywanego programem SOLVSTR. W dodatku uzyskane rozwiązanie nie spełnia podstawowych kryteriów poprawności (błąd powyżej 5%). Dla porównania wartości ekstrem globalnych zostały zebrane w Tabeli 2.12.

| Lp | Siatka | U_{min} | U_{max} | V_{min} | V _{max} | Nu _c |
|------|---------|-----------|-----------|-----------|------------------|-----------------|
| MEF1 | 50x50 | -157.27 | 98.23 | -171.18 | 254.21 | 6.89 |
| MEF2 | 100x100 | -161.87 | 103.78 | -167.58 | 225.94 | 6.22 |

Tabela 2.12. Zestawienie ekstremalnych wartości składowych prędkości oraz wartości liczbyNusselta dla programu FLUENT

2.4.3. Definicja rozwiązania wzorcowego

Praktykowane powszechnie porównywanie globalnych wartości (*extremów*) rozwiązań nie wystarcza dla określenia dokładności otrzymanego rozwiązania. Przykładem jest porównanie zamieszczonego w Tabeli 2.8. zestawienia wartości globalnych dla różnych siatek programu FRE

z profilami prędkości otrzymanych dla tych przypadków (Rysunek 2.9). Można zauważyć, że rozwiązanie dla siatki 40x40 (FRE2), mimo, że charakteryzuje się małymi błędami globalnymi, różni się w niektórych punktach profilu pionowej składowej prędkości niemal o 50% od rozwiązania wzorcowego (Rysunek 2.9.a). Podobne rozbieżności widoczne są też dla poziomej składowej prędkości.

Powyższe fakty dowodzą, że modelowanie naturalnej konwekcji z silnie nieliniowym członem wypornościowym wymaga dokładnej analizy i gęstych siatek obliczeniowych. Porównując na przykład liczbę Nusselta dla najrzadszej siatki (FRE1) i dla siatki dwa razy gęstszej (Tabela 2.8) można błędnie wywnioskować, że oba rozwiązania przedstawiają taką samą konfigurację. Porównanie profili składowych prędkości (rys. 2.9.) jasno wskazuje na duże rozbieżności w obu przypadkach. Widać, że rozwiązania charakteryzujące się małymi błędami (2%-5%) odwzorowania wartości globalnych, i tym samym kwalifikowane zazwyczaj w literaturze jako poprawne, mogą w istocie opisywać różne struktury przepływu. Takie błędy mogą być decydujące przy modelowaniu dodatkowych zjawisk, np. modelowania procesu krzepnięcia, gdzie nieliniowe charakterystyki równań przepływowych sprzęgają się z deformującą się, ruchomą granicą frontu fazowego.

analizy jakości odwzorowania struktury przepływu Dla przeprowadzenia ilościowej zaproponowano nowa metodę weryfikacji. Do porównań wybrano profile składowych prędkości i temperatury otrzymane na podstawie rozwiązania wzorcowego (referencyjnego), otrzymanego programem FRECON3V na siatce 201x201 (FRE5). Wybrane profile aproksymowano wielomianami wyższego rzędu, co umożliwia ich porównanie z innymi rozwiązaniami bez dodatkowej interpolacji (przy różnych rozmiarach siatek). Profile wyznaczono dla trzech przekrojów: poziomą i pionową linię przecinającą domenę obliczeniową (Y=0.5 i X=0.5), oraz pionową linię przecinają obszar punktu siodłowego przepływu (X=0.9). Wartości współczynników wielomianów interpolujących profil składowych prędkości V_1 , V_2 oraz temperatury T wzdłuż prostych X = 0.5, Y = 0.5 i X = 0.9 zostały przedstawione w tabelach 2.11-2.13. Profile te zostały przyjęte jako numeryczne rozwiązanie wzorcowe dla omawianego zagadnienia. Współczynniki zostały otrzymane przy pomocy nieliniowej metody najmniejszych kwadratów (algorytm Marquardt-Levenberg). Stopień wielomianów oraz dokładność współczynników zostały wybrane w ten sposób, aby błąd interpolacji (stosunek odchylenia standardowego do maksymalnej wartości) był mniejszy niż 1 %.

Rys. 2.9. Wartości składowych prędkości dla poziomego centralnego przekroju (Y=0.5) uzyskane kodem FRECON. (a) – pionowa składowa prędkości, (b) - pozioma składowa prędkości

| | V_{l} | V_2 | Т |
|-----------------|-------------------|---------------------|--------------------|
| a_0 | 0.653255375988277 | -0.0182133390825522 | 0.375731268271168 |
| a ₁ | -236.702203764653 | -0.534506952806084 | 0.0646566206852292 |
| a ₂ | 1443.71621734046 | -4649.62374660758 | -3.44261930694882 |
| a ₃ | -13999.9971459506 | 9166.34090898581 | 80.5716617494023 |
| a_4 | -48978.2873061909 | 184756.318840003 | -849.389178138508 |
| a_5 | 769502.177696391 | -2267214.57474188 | 5426.31856180659 |
| a ₆ | -2826411.42861687 | 13921830.6389979 | -20619.6870300723 |
| a ₇ | 5049355.25968998 | -50905496.7836152 | 47584.9389176856 |
| a_8 | -4889309.49455426 | 117326421.048108 | -66982.5680747791 |
| a ₉ | 2473294.32955038 | -175454949.94745 | 54146.8042661755 |
| a ₁₀ | -514661.642022168 | 170542299.447756 | -18312.94874948 |
| a ₁₁ | | -104264882.357183 | -5638.00828334596 |
| a ₁₂ | | 36505160.4951902 | 6840.33395345218 |
| a ₁₃ | | -5592440.58260601 | -1672.49783568399 |

Tabela 2.13. Wartości współczynników dla profilu wzdłuż prostej X = 0.5

| | V_{I} | V_2 | Т | | |
|-----------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--|--|
| a_0 | -0.971923736403444 | 1.00212115245059 | 0.999467521831559 | | |
| a ₁ | 435.542611756185 | 12877.9988611009 | -6.23069515529224 | | |
| a ₂ | -35897.4472988611 | -259340.543848846 | -18.9999577130502 | | |
| a ₃ | 1124550.4608794 | 2053796.14649148 | 433.527770212382 | | |
| a_4 | -19836290.5781327 | -5602841.78532119 | 7318.66314332766 | | |
| a ₅ | 217415780.824244 | -30304885.3151783 | -180265.707163689 | | |
| a ₆ | -1573770830.54861 | 358963997.276281 | 1714792.57838228 | | |
| a ₇ | 7864305725.45593 | -1697089432.98434 | -9862261.15685317 | | |
| a ₈ | -27964717917.5742 | 4892293454.42925 | 38472869.7475459 | | |
| a 9 | 72090244360.2021 | -9357882052.45715 | -106665059.51901 | | |
| a ₁₀ | -135881981012.186 | 12081139841.5678 | 214297962.730994 | | |
| a ₁₁ | 187042192305.203 | -10321221406.5473 | -313025047.586471 | | |
| a ₁₂ | -185722571203.416 | 5462280648.88341 | 328987879.084903 | | |
| a ₁₃ | 129406337902.134 | -1489621427.86707 | - 242193161.156869 | | |
| a ₁₄ | -59987319824.8771 | 62096039.6233113 | 118435075.266555 | | |
| a ₁₅ | 16604163672.9515 | 43140732.9300454 | -34530031.2923873 | | |
| a ₁₆ | -2075551754.938 | 0.321619021644532 | 4539519.05438302 | | |

Tabela 2.14. Wartości współczynników dla profilu wzdłuż prostej Y = 0.5

| | U | W | Т |
|-----------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| a_0 | 1.37834316239398 | 1.11560341761746 | 0.308900034946171 |
| a ₁ | 869.803859921856 | -682.103162659822 | -0.574121199057708 |
| a ₂ | 74379.0946531731 | 64546.3444091368 | 74.382226060503 |
| a ₃ | -3924258.51426546 | -2657731.00888943 | -3161.22612928187 |
| a4 | 89435741.7003693 | 60098287.7693382 | 74817.9579968359 |
| a ₅ | -1217186200.6406 | -822661490.080435 | -1125745.01070913 |
| a_6 | 10971526417.6405 | 7425487150.03986 | 11435967.2156945 |
| a ₇ | -69219909243.1401 | -46729243229.224 | -81662746.1201518 |
| a_8 | 316473663407.374 | 212583413470.936 | 421890116.068198 |
| a 9 | -1072529330832.37 | -715751344227.008 | -1608940868.43137 |
| a ₁₀ | 2732146343933.84 | 1809508968294.41 | 4588612041.2787 |
| a ₁₁ | -5267137304120.64 | -3459353036180.82 | -9850623665.12099 |
| a ₁₂ | 7684697385210.4 | 5001906037363.17 | 15919604870.6355 |
| a ₁₃ | -8422179003474.85 | -5429815720822.07 | -19229337194.963 |
| a ₁₄ | 6816871501820.86 | 4350956298121.35 | 17073562106.7329 |
| a ₁₅ | -3949555692631.44 | -2494534120078.54 | -10804649895.8457 |

| a ₁₆ | 1548473261831.82 | 967384927672.173 | 4608652340.13695 |
|-----------------|------------------|-------------------|-------------------|
| a ₁₇ | -367847357872.57 | -227214939183.605 | -1186818611.97188 |
| a ₁₈ | 39966515019.2774 | 24398428716.3919 | 139329555.368117 |

Tabela 2.15. Wartości współczynników dla profilu wzdłuż prostej X = 0.9

Za miarę dokładności wyznaczenia wartości funkcji $f(x_i)$ badanego rozwiązania numerycznego, otrzymanego dla $N \ge N$ węzłów, przyjęto odchylenie standardowe obliczane w stosunku do wartości $w(x_i)$ wielomianu rozwiązania wzorcowego (Tabele 2.13-15) w węzłach x_i siatki:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - w(x_i))^2$$
(2.51)

Dla trzech wybranych profili odchylenia standardowe ε składowych prędkości U, V i temperatury T opisuje dziewięć wskaźników: $\varepsilon_{ul}, \varepsilon_{wl}, \varepsilon_{l1}, \varepsilon_{u2}, \varepsilon_{w2}, \varepsilon_{l2}, \varepsilon_{u3}, \varepsilon_{w3}$ oraz ε_{l3} . Wartości te obliczone dla testowanych przypadków zebrano w tabeli Tabeli 2.16 i pokazano na rys. 2.10.

Zaproponowana miara dokładności może być łatwo użyta do oceny wydajności dowolnego rozwiązania numerycznego, bez względu na wymiar siatki, na jakiej zostało otrzymane. Przyjmując trzy odchylenia standardowe jako dopuszczalny błąd rozwiązania, można uznać, że tylko rozwiązania FRE4-7 i FLU3 spełniają kryterium dokładności, czyli są wystarczająco bliskie rozwiązania referencyjnego.

| | <i>Y</i> =0.5 | | | X=0.5 | | | X=0.9 | | |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|-----------------|--------------------|--------------------|-----------------|--------------------|
| | ${\cal E}_{ul}$ | ${\cal E}_{wl}$ | ${\cal E}_{tl}$ | \mathcal{E}_{u2} | ${\cal E}_{w2}$ | \mathcal{E}_{t2} | \mathcal{E}_{u3} | ${\cal E}_{W3}$ | \mathcal{E}_{t3} |
| FRE6 | 0.2831 | 1.3876 | 1.64E-06 | 0.1670 | 0.0024 | 8.03E-08 | 1.2667 | 0.6012 | 2.28E-05 |
| FRE5 | 0.3284 | 1.6127 | 1.94E-06 | 0.2045 | 0.0293 | 2.14E-07 | 1.2213 | 0.6626 | 2.35E-05 |
| FRE4 | 0.5411 | 1.8601 | 3.20E-06 | 0.4004 | 0.2127 | 8.77E-07 | 1.3658 | 0.9012 | 2.57E-05 |
| FRE3 | 3.5512 | 7.7287 | 1.94E-05 | 2.4778 | 2.4683 | 8.55E-06 | 3.0392 | 4.3332 | 5.45E-05 |
| FRE2 | 114.45 | 178.24 | 6.98E-04 | 69.645 | 95.363 | 2.48E-04 | 67.3915 | 144.683 | 1.10E-03 |
| FRE1 | 1893.7 | 2857.7 | 4.40E-03 | 753.31 | 1874.6 | 1.36E-02 | 364.095 | 1492.25 | 9.50E-03 |
| FLU3 | 1.5510 | 3.0529 | 5.32E-06 | 0.2201 | 0.0892 | 2.50E-06 | 4.8378 | 5.1385 | 7.08E-05 |
| FLU2 | 1.8745 | 3.1868 | 6.84E-06 | 0.2514 | 0.0488 | 2.43E-06 | 5.3223 | 6.1924 | 7.79E-05 |
| FLU1 | 6.1705 | 8.8068 | 4.52E-05 | 0.4913 | 0.2016 | 7.51E-08 | 34.2911 | 91.7224 | 3.68E-04 |
| FLU0 | 28.760 | 49.564 | 3.55E-04 | 2.5880 | 1.2864 | 2.88E-05 | 91.4327 | 433.448 | 8.58E-04 |
| FID2 | 3.8785 | 11.347 | 1.70E-05 | 7.7958 | 5.0095 | 1.48E-05 | 5.9907 | 18.3377 | 3.87E-05 |
| FID1 | 10.678 | 24.737 | 6.03E-05 | 13.056 | 35.092 | 4.70E-05 | 15.0269 | 27.8671 | 2.04E-04 |
| STR5 | 2.8876 | 10.924 | 8.17E-06 | 1.4492 | 1.1331 | 6.39E-06 | 7.0646 | 8.5051 | 7.10E-05 |
| STR4 | 4.3005 | 18.850 | 8.95E-06 | 2.3089 | 1.2263 | 1.30E-05 | 11.1198 | 13.5929 | 8.40E-05 |
| STR3 | 7.6570 | 34.860 | 1.87E-05 | 4.5268 | 2.9492 | 2.61E-05 | 16.8484 | 17.3370 | 9.09E-05 |
| STR2 | 20.769 | 77.964 | 6.67E-05 | 11.768 | 11.837 | 5.88E-05 | 32.4156 | 20.6114 | 1.01E-04 |
| STR1 | 283.48 | 506.50 | 1.26E-03 | 127.88 | 251.92 | 2.83E-04 | 221.818 | 79.4415 | 0.0014 |
| MEF1 | 586.31 | 1176.3 | 3.48E-03 | 214.57 | 799.64 | 5.34E-04 | 267.977 | 481.019 | 0.0038 |

Tabela 2.16. Wartości estymatorów dla składowych prędkości U, V oraz temperatury T wzdłuż
prostych Y = 0.5, X = 0.5 oraz X = 0.9

Analiza wrażliwości siatki wykonana dla pięciu opisanych powyżej programów pozwala na ocenę zbieżności rozwiązań i na oszacowanie ich asymptotycznego zachowania. Na rys. 2.10 widać, na przykład, bardzo powolną zbieżność rozwiązań programu SOLVSTR w porównaniu z programem FRECON. Analiza wartości odchylenia standardowego wyznaczonego dla kolejnych siatek i rozwiązań dostarczanych przez programy FLUENT i FIDAP wykazuje zbieżność liniową, co jest także dużo gorszym wynikiem niż ten otrzymany przez programy FRECON, czy nawet

SOLVSTR. Rezultat ten jest zaskakujący, gdyż teoretyczny wykładnik zbieżności wszystkich analizowanych kodów jest ten sam i wynosi dwa.

Rys. 2.10. Miara dokładności rozwiązania numerycznego w funkcji odległości między węzłami: (a) $-\varepsilon_{ul}, \varepsilon_{vl}$ dla składowych prędkości wzdłuż prostej Y=0.5; (b) $-\varepsilon_{u2}, \varepsilon_{v2}$ dla składowych prędkości wzdłuż prostej X=0.5, (c) $-\varepsilon_{u3}, \varepsilon_{v3}$ dla składowych prędkości wzdłuż prostej X=0.9; (d) $-\varepsilon_{l1}, \varepsilon_{l2}, \varepsilon_{l3}$ dla temperatury wzdłuż prostych Y=0.5, X=0.5 i X=0.9

Analizując rys. 2.10.d można zauważyć, że błąd rozwiązania dla temperatury znacznie szybciej maleje niż ma to miejsce dla składowych prędkości. Wskazuje to na niewielki wpływ członu konwekcyjnego na zbieżność rozwiązania. Wynika z tego, że porównywanie samej temperatury nie jest wystarczającym kryterium poprawności rozwiązania, przynajmniej dla analizowanej konfiguracji.

Metoda bezsiatkowa zastosowana w programie SOLVMEF nie pozwala na osiągnięcie wystarczającej dokładności rozwiązań. Błąd obliczony według powyżej zdefiniowanego kryterium jest nieakceptowalnie duży, a bardzo powolna zbieżność kodu uniemożliwiła przeprowadzenie testów dla dużej liczby punktów kolokacyjnych. Zmiana metody rozwiązywania układu równań na bardziej zaawansowaną oraz wykorzystanie tzw. *preconditioningu* być może pozwoliłaby pokonać te trudności.

Podsumowując, zdefiniowany wzorzec numeryczny pozwala na wiarygodną ocenę dokładności i wydajności kodów numerycznych dla przepływów lepkich i termicznych. Może być wykorzystywany w pierwszym etapie weryfikacji – weryfikacji programu. Przeprowadzone testy pokazały na nieadekwatność oceny zbieżności na podstawie analizy punktowych wartości wybranych zmiennych. Porównane tutaj dwa kody komercyjne i trzy akademickie wykazują znaczne różnice w szybkości osiągania zbieżnego i dokładnego rozwiązania. Stosując definicję błędu opartą na odchyleniu standardowym dla wybranych profili prędkości i temperatury stwierdzono, że tylko rozwiązania kodów FRECON3V i FLUENT są dokładne. Jednak uzyskanie dokładnego rozwiązania komercyjnym programem FLUENT wymagało siatki obliczeniowej składającej się z 380x380 węzłów, prawie dwa razy gęstszej od tej użytej dla uzyskania podobnego rozwiązania programem FRECON3V. Niewątpliwie komplikacje wewnętrznej struktury bardzo rozbudowanych uniwersalnych programów komercyjnych mogą utrudniać uzyskanie dokładnego rozwiązania. Stosowanie wzorców numerycznych, takich, jaki powyżej zaproponowano, umożliwia obiektywną ocenę jakości rezultatów generowanego tymi kodami.